Notes sur la G-théorie rationnelle des champs de Deligne-Mumford

B. Toen*

July 27, 2018

Résumé

Basé sur les méthodes utilisées pour démontrer la formule de Riemann-Roch pour les champs algébriques ([T1, T2]), ce travail donne une description des spectres de G-théorie rationnelle des champs de Deligne-Mumford sur des bases quelconques. Nous utiliserons ces résultats pour étudier la K-théorie équivariante, ainsi que pour définir de nouvelles filtrations sur la K-théorie des champs algébriques, permettant potentiellement de développer un formalisme de Riemann-Roch analogue à [So].

Abstract

Based on the methods used to prove the Riemann-Roch formula for stacks ([T1, T2]), this paper contains a description of the rationnal G-theory spectrum of Deligne-Mumford stacks over general bases. We will use these results to study equivariant K-theory, and also to define new filtrations on K-theory of algebraic stacks, wich allows potentialy to developp a Riemann-Roch formalism analog to [So].

Mots clés: G-théorie, champs algébriques.

*Max Planck Institut fur Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn, Germany
toen@mpim-bonn.mpg.de

Table des matières

1 Introduction

Dans [T1, T2] on a montré comment utiliser la notion de 'cohomologie à coefficients dans les représentations', afin de démontrer des formules de Riemann-Roch pour les champs algébriques. L'introduction de cette nouvelle théorie cohomologique était directement inspirée des résultats décrivant les spectres de G-théorie des champs algébriques ([T1, Thm. 3.15], [T2, Thm. 2.15]). Nous donnons ici la version générale de ces descriptions, pour le cas des champs de Deligne-Mumford.

Nous commencerons dans le premier paragraphe par donner les définitions nécessaires pour énoncer notre théorème. Il s'agit essentiellement de généralisation des idées utilisées dans [T1]. La petite différence est que nous utiliserons le 'champ des sous-groupes cycliques' plutot que le 'champ des ramifications' qui est mal adpaté lorsque le champ ne contient pas assez de racines de l'unité.

La preuve du théorème sera donnée dans le second paragraphe. Ici aussi les idées proviennent directement de [T1]. En particulier nous utiliserons les théorèmes de descente, ainsi que la notion de quasi-enveloppe de Chow. Nous passerons assez vite sur les détails de la démonstration que le lecteur peut trouver dans [T1, T2].

Enfin, nous donnerons deux exemples d'application de ces résultats. Tout d'abord nous montrerons comment on peut répondre à des questions posées par A. Vistoli dans [V2], concernant les groupes de G-théorie équivariants, ainsi qu'à certaines de leurs généralisations au cas des champs algébriques. Enfin, nous définirons une γ-filtration sur la K-théorie des champs algébriques, qui permet hypothétiquement de construire un formalisme de Riemann-Roch analogue à celui décrit dans [So]. On espère ainsi généraliser le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch de [T1] au cas des champs algébriques sur des bases générales.

Nous terminerons par un bref apperçu des généralisations éventuelles au cas des champs d'Artin.

Comme son titre l'indique, le présent travail est écrit sous forme de notes. Cela implique que nous ne prétendons pas à être exhaustifs, que se soit pour les résultats énoncés, ou encore pour les arguements qui leur servent de preuve.

Ce travail à été accompli pour les besoins d'un exposé fait à l'institut Max Planck en Octobre 1999, que je tiens à remercier pour son acceuil. Il a aussi fait l'objet d'un exposé à la conférence de Bologne sur la théorie des intersections en décembre 1999, dont je remercie les organisateurs pour m'avoir permit de m'exprimer sur le sujet.

Le présent travail est la continuation directe de mon travail de thèse, dirigé par Joseph Tapia et Carlos Simpson, que je tiens à remercier de nouveau, et sans qui il n'aurait certainement jamais vu le jour.

Je remercie aussi A. Vistoli et G. Vezzosi pour m'avoir signaler la formule 4.6.

Notations et conventions:

Par la suite nous utiliserons l'expression 'champ algébrique' pour signifier 'champ algébrique de Deligne-Mumford séparé et de type fini sur un schéma de base noethérien régulier S'. Ils seront généralement noté par les lettres F, F' ... Nous dirons aussi 'schéma' (resp. 'espace algébrique') pour signifier 'schéma (resp. 'espace algébrique') séparé de type fini sur S'. Nous adopterons aussi l'abus de language qui consiste à dire qu'un champ algébrique est quasi-projectif (resp. projectif), si son espace de modules est quasi-projectif (resp. projectif) sur S.

Le petit site étale d'un champ algébrique F sera noté F_{et}. Nous utiliserons 'morphismes de champs' pour signifier '1-morphismes de champs'. La plupart du temps ils seront même considérés comme morphismes dans la catégorie homotopique des champs.

Pour un site C, et un préfaisceau en spectres H sur C, nous dirons que H est flasque, si pour tout objet X de C, et tout morphisme couvrant $U \longrightarrow X$, le morphisme naturel

$$H(X) \longrightarrow \check{H}(U/X, H) := Holim_{[m]\in\Delta^o} H(\underbrace{U \times_X U \cdots \times_X U}_{m+1\ fois})$$

est une équivalence faible de spectres. Le théorème de descente cohomologique affirme que tout préfaisceau en spectres fibrant (pour la structure de catégorie de modèles fermée de [Ja, Thm. 2.53]) est flasque.

Pour tout préfaisceau en spectres H, nous noterons $\mathbb{H}(C, H)$ le spectre des sections globales d'un modèle fibrant pour H. C'est un objet qui est bien défini dans la catégorie homotopique des préfaisceaux en spectres. De façon générale, tous les préfaisceaux en spectres seront considérés comme des objets de la catégorie homotopique. Ainsi, lorsque nous parlerons de préfaisceaux en spectres en anneaux il s'agira d'objet en anneaux dans la catégorie homotopique. De même, lorsque nous parlerons d'isomorphismes de spectres, il s'agira d'isomorphismes dans la catégorie homotopique.

Pour tout spectre H, nous noterons comme il en est l'habitude $H_{\mathbb{Q}}$ le spectre rationnel associé. Plus généralement, si Λ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, on notera $H_\Lambda := H \wedge K(\Lambda, 0)$. Si H est un spectre en anneaux, et Λ une $\mathbb{Q}$-algèbre, H_Λ est naturellement un spectre en anneaux.

Pour tout champ algébrique F, on notera $\mathbf{G}(F)$ son spectre de G-théorie, et $\underline{\mathbf{G}}(F) := \mathbb{H}(F_{et}, \underline{G_{\mathbb{Q}}})$ son spectre de G-cohomologie rationnelle ([T2, Def. 2.1]). Nous noterons aussi $\mathbf{K}(F)$ son spectre de K-théorie des complexes parfaits sur F ([Th]). De même, nous noterons $\underline{\mathbf{K}}(F) := \mathbb{H}(F_{et}, \underline{K_{\mathbb{Q}}})$ son spectre de K-cohomologie rationnelle.

Enfin, nous avertissons le lecteur que nous ne distinguerons pas les foncteurs à isomorphismes près et les vrais foncteurs. Ainsi, la correspondance qui à un schéma X associe sa catégorie des faisceaux quasi-cohérents $Qcoh(X)$ sera considérée comme un foncteur $Qcoh : Sch/S \longrightarrow Cat$. Le lecteur soucieux de garder cette distingtion utilisera les principes de strictification des pseudo-foncteurs.

2 Morphismes de diagonalisation et d'induction

Si $H \longrightarrow X$ est un schéma en groupes fini et étale, nous appellerons sous-groupe cyclique de H, tout sous-schéma en groupes de H qui localement pour la topologie étale sur X est isomorphe à $X \times c$, où c est un groupe discret cyclique.

Soit F un champ algébrique. On peut définir un nouveau champ C_F de la façon suivante. Pour un schéma X, les objets de $C_F(X)$ sont les couples (s, c), où s est un objet de $F(X)$, et c est un sous-groupe cyclique du schéma en groupes des automorphismes de s sur X. Un morphisme entre (s, c) et (s', c') dans $C_F(X)$ est la donnée d'un morphisme $u : s \to s'$ dans $F(X)$ tel que $u.c.u^{-1} = c'$. Le lecteur vérifiera que ceci définit bien un champ.

Définition 2.1 *Soit F un champ algébrique. Le champ des sous-groupes cycliques modérés C_F^t, est le sous-champ de C_F formé des objets $(s, c) \in C_F(X)$, où l'ordre de c est premier aux caractéristiques de X.*

On dispose des morphismes $C_F^t \longrightarrow C_F \longrightarrow F$, où le second oublie le sous-groupe cyclique, $(s, c) \mapsto s$. Il est facile de vérifier que ces deux morphismes sont représentables. De plus, le premier est une immersion ouverte, et le second est fini et non-ramifié.

On dispose aussi de la description locale suivante (dont on peut déduire les assertions précédentes). Notons $p : F \longrightarrow M$ la projection de F sur son espace de modules. On sait que localement sur M_{et}, le champ F est équivalent à un $[X/H]$, où X est un schéma et H est un groupe fini opérant sur X. Comme on ne s'intéresse qu'à la structure locale on supposera donc que $F = [X/H]$. Notons alors $c(H)$ un ensemble de représentants de l'ensemble des classes de conjugaisons de sous-groupes cycliques de H. Pour $c \in c(H)$, notons X^c le sous-schéma fermé des points fixes de l'action de c sur X, et U^c l'ouvert de X^c où l'ordre de c est inversible. Notons aussi pour $c \in c(H)$, N_c le normalisateur de c dans H, qui agit naturellement par restriction sur X^c et U^c. On peut alors vérifier que les champs C_F et C_F^t sont donnés par

$$C_F \simeq \coprod_{c \in c(H)} [X^c/N_c] \qquad C_F^t \simeq \coprod_{c \in c(H)} [U^c/N_c].$$

De part le fait que C_F classifie les sous-groupes cycliques des automorphismes de F, il existe un champ en groupes universel

$$\mathcal{C}_F \longrightarrow C_F,$$

dont la fibre au-dessus d'un schéma $X \longrightarrow C_F$ correspondant à $(s, c) \in C_F(X)$ est le schéma en groupes $c \longrightarrow X$. Ce schéma en groupes possède un faisceau des caractères

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{X} : & Sch/C_F & \longrightarrow & Gp \\ & ((s,c) : X \to C_F) & \mapsto & Hom_{gp/X}(c, \mathbb{G}_m) \end{array}$$

Par restriction, on obtient un faisceau en groupes abéliens sur C_F^t, encore noté $\mathcal{X}$. Comme la restriction de $\mathcal{C}_F$ sur C_F^t est un schéma en groupes fini et de type multiplicatif ([SGA 3]), le faisceau $\mathcal{X}$ est un faisceau localement constant pour la topologie étale. De plus, il est localement isomorphe au faisceau des racines de l'unité μ_m, pour un certain m.

Pour tout champ algébrique F, on dispose du faisceau associé au préfaisceau en $\mathbb{Q}$-algèbres de groupes

$$\begin{array}{ccc} Sch/C_F^t & \longrightarrow & \mathbb{Q}-Alg \\ ((s,c):X \to C_F^t) & \mapsto & \mathbb{Q}[Hom_{gp/X}(c,\mathbb{G}_m)] \end{array}$$

Ce faisceau sera noté $\mathbb{Q}[\mathcal{X}]$. Localement sur $(C_F^t)_{et}$, c'est un faisceau constant isomorphe à $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/m] \simeq \frac{\mathbb{Q}[T]}{T^m-1}$. Ainsi, en choisissant $\zeta_m \in \mathbb{C}$ une racine primitive de l'unité, il existe localement des quotients $\mathbb{Q}[\mathcal{X}] \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_m)$. On peut vérifier que les noyaux de ces morphismes locaux sont indépendants du choix de ζ_m, et aussi du choix de l'isomorphisme $\mathbb{Q}[\mathcal{X}] \simeq \frac{\mathbb{Q}[T]}{T^m-1}$. Ils se recollent donc en un idéal $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathbb{Q}[\mathcal{X}]$, sur C_F^t.

Définition 2.2 *Pour tout champ algébrique F on notera*

$$\Lambda_F := \frac{\mathbb{Q}[\mathcal{X}]}{\mathcal{I}}$$

le faisceau en $\mathbb{Q}$-algèbres quotient.

Pour en champ algébrique F, le champ C_F^t, muni de son faisceau de $\mathbb{Q}$-algèbres Λ_F, est 'fonctoriel en F'. Ceci signifie que tout morphisme de champs algébriques $f : F \longrightarrow F'$ induit un morphisme naturel $Cf : C_F^t \longrightarrow C_{F'}^t$. De plus, la restriction des caractères permet de définir un morphisme naturel de faisceaux de $\mathbb{Q}$-algèbres sur C_F^t

$$Res : Cf^*\Lambda_{F'} \longrightarrow \Lambda_F$$

En utilisant le morphisme d'induction des caractères, on peut aussi définir un morphisme de faisceaux en $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels

$$Ind : \Lambda_F \longrightarrow Cf^*\Lambda_{F'}.$$

Localement pour la topologie étale sur C_F^t, ces morphismes sont isomorphes à

$$Res : \mathbb{Q}(\zeta_m) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_{m.p})$$

$$Ind = Tr : \mathbb{Q}(\zeta_{m.p}) \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_m),$$

où Tr est le morphisme trace pour l'extension de corps $\mathbb{Q}(\zeta_m) \hookrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_{m.p})$.

Pour tout faisceau en $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels V sur un site C, on peut construire le préfaisceau en spectres $K(V,0)$. Vu comme objet de la catégorie homotopique des préfaisceaux en spectres sur C, il est caractérisé par le fait que

$\pi_m(K(V,0)) = 0$ si $m \neq 0$ et $\pi_0(K(V,0)) \simeq V$. Remarquons que $K(V,0)$ est aussi un préfaisceau en spectres de Moore (i.e. ses faisceaux d'homologie sont $\underline{H}_m(K(V,0)) \simeq 0$ si $m \neq 0$ et $\underline{H}_0(K(V,0)) = V$).

Si de plus, V est muni d'une structure de faisceau en $\mathbb{Q}$-algèbres, alors $K(V,0)$ devient naturellement un préfaisceau en spectres en anneaux.

Soit H un préfaisceau en spectres en anneaux sur C. Alors, $H \wedge K(V,0)$ est naturellement un préfaisceau en spectres en anneaux. De même, si K est un préfaisceau en spectres qui est un module sur H, alors $K \wedge K(V,0)$ est un module sur $H \wedge K(V,0)$.

On peut donner une description explicite et fonctorielle de $H \wedge K(V,0)$ de la façon suivante.

Soit H un Ω-spectre, et A un anneau. Notons $e_n : H_n \longrightarrow \Omega H_{n+1}$ les morphismes de transitions (qui sont des équivalences faibles). On définit un nouveau spectre par

$$H \otimes A : n \mapsto H_n \otimes A,$$

où pour un ensemble simplicial X, $X \otimes A$ est le A-module simplicial $[p] \mapsto X_p \otimes A$, obtenu par tensorisation. Pour définir les morphismes de transitions $H_n \otimes A \longrightarrow \Omega(H_{n+1} \otimes A)$ il nous suffit de définir un morphisme naturel en X

$$(\Omega X) \otimes A \longrightarrow \Omega(X \otimes A).$$

Or, le morphisme naturel $X \longrightarrow X \otimes A$ induit $\Omega X \longrightarrow \Omega(X \otimes A)$, qui comme $\Omega(X \otimes A)$ est naturellement un A-module simplicial, s'étend un le morphisme cherché.

On peut vérifier que si A est une $\mathbb{Q}$-algèbre alors $H \otimes A$ est naturellement équivalent à $H \wedge K(A,0)$. Si H possède un produit $H \wedge H \longrightarrow H$, on laisse le soin au lecteur de construire naturellement un produit sur $H \otimes A$.

Appliquons ces dernières remarques à $C = (C_F^t)_{et}$ le petit site étale du champ C_F^t, $V = \Lambda$, $H = \underline{\mathbf{K}}$ le préfaisceau en spectres de K-théorie, et $K = \underline{\mathbf{G}}$ le préfaisceau en spectres de G-théorie. On dispose ainsi du préfaisceau en spectres en anneaux, $\underline{\mathbf{K}}_\Lambda := \underline{\mathbf{K}} \wedge K(\Lambda,0)$, et d'un module sur ce dernier $\underline{\mathbf{G}}_\Lambda := \underline{\mathbf{G}} \wedge K(\Lambda,0)$.

A l'aide de ces notations, rappelons les définitions des spectres de K-théorie à coefficients dans les représentations. La définition que nous donnons ici a subi une légère modification par rapport à [T2, Def. 2.13].

Définition 2.3 *Soit F un champ algébrique.*

1. *Le spectre de K-théorie à coefficients dans les représentations de F est défini par*

$$\underline{\mathbf{K}}^\chi(F) := \mathbb{H}((C_F^t)_{et}, \underline{\mathbf{K}}_\Lambda).$$

2. *Le spectre de G-théorie à coefficients dans les représentations de F est défini par*
$$\underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) := \mathbb{H}((C_F^t)_{et}, \underline{\mathbf{G}}_{\Lambda}).$$

Les m-ème groupes d'homotopie de ces spectres seront notés $\underline{\mathbf{K}}_m^{\chi}(F)$ et $\underline{\mathbf{G}}_m^{\chi}(F)$.

En utilisant les morphismes de restriction et d'induction définis précédemment, on laisse le soin au lecteur de vérifier les propriétés suivantes.

- La correspondance $F \mapsto \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F)$ est un foncteur contravariant de la catégorie homotopique des champs algébriques vers la catégorie homotopique des spectres en anneaux.

  De même, $F \mapsto \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F)$ est un foncteur covariant de la catégorie homotopique des champs algébriques et morphismes propres vers celle des spectres. C'est aussi un foncteur contravariant pour les morphismes de Tor-dimension finie.

- Pour tout champ algèbrique F, $\underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F)$ est un module sur $\underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F)$.

  De plus, pour tout morphisme propre $p : F \longrightarrow F'$, le diagramme suivant commute
$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) \wedge \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F') \arrow[r, "p_* \wedge Id"] \arrow[d, "Id \wedge p^*"'] & \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F') \wedge \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F') \arrow[d, "- \otimes -"] \\
\underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) \wedge \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F) \arrow[r, "p_*(- \otimes -)"'] & \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F') \wedge \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F')
\end{tikzcd}$$

- Pour tour diagramme cartésien
$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"'] & G' \arrow[d, "f"] \\
F \arrow[r, "p"'] & G
\end{tikzcd}$$
  avec p propre et f plat, le diagramme suivant commute
$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "g^*"'] & \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(G) \arrow[d, "f^*"] \\
\underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F') \arrow[r, "q_*"] & \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(G)
\end{tikzcd}$$

- Pour tout immersion fermée $j : F' \hookrightarrow F$, de complémentaire $i : U = F - F' \hookrightarrow F$, on dispose d'une suite exacte de fibration
$$\underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F') \xrightarrow{j_*} \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) \xrightarrow{i^*} \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(U)$$

- Pour tout champ algébrique F, il existe un morphisme $\underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F)$, fonctoriel pour les images réciproques.

  Si F est régulier, alors le morphisme ci-dessus est un isomorphisme, et est compatible avec les produits.

- Pour tout torseur affine sur un champ algébrique $p : V \longrightarrow F$, le morphisme
$$p^* : \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(V)$$
  est un isomorphisme.

Remarque: Comme le morphisme naturel $\pi : C_F^t \longrightarrow F$ possède une section naturelle (correspondant au sous-groupe trivial), il existe des décompositions canoniques
$$\underline{\mathbf{K}}_*^{\chi}(F) \simeq \underline{\mathbf{K}}_*(F) \oplus \underline{\mathbf{K}}_*^{\chi\neq 1}(F)$$
$$\underline{\mathbf{G}}_*^{\chi}(F) \simeq \underline{\mathbf{G}}_*(F) \oplus \underline{\mathbf{G}}_*^{\chi\neq 1}(F)$$
Supposons que F soit un champ algébrique régulier. Alors on peut montrer que le morphisme naturel
$$\mathbf{K}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(F)$$
est un isomorphisme. En effet, comme F est régulier, tout complexe de faisceaux quasi-cohérents sur F, à cohomologie cohérente et bornée, est un complexe parfait. Et, comme F est noethérien, on peut vérifier comme dans [Th, Cor. 3.13], que $\mathbf{G}(F)$ est isomorphe au spectre de K-théorie de ces complexes.

Le théorème principal est le suivant, dont la preuve sera donnée dans le prochain paragraphe.

Théorème 2.4 *Soit F un champ algébrique.*

1. *Il existe un morphisme de spectres en anneaux*
$$\phi_F : \mathbf{K}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F),$$
   qui est fonctoriel (dans la catégorie homotopique) pour les images réciproques.

   Si F est régulier, le morphisme ϕ_F ci-dessus induit un isomorphisme de spectres en anneaux
$$\phi_F : \mathbf{K}(F)_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbf{G}(F)_{\mathbb{Q}} \simeq \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F) \simeq \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F),$$

2. *Si le morphisme $\pi : C_F^t \longrightarrow F$ est de Tor-dimension finie, alors il existe un moprhisme de spectres*
$$\phi_F : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F),$$
   qui est fonctoriel (dans la catégorie homotopique) pour les images réciproques.

   De même, si F est une gerbe sur un espace algébrique, alors le morphisme ci-dessus ϕ_F induit un isomorphisme de spectres
$$\phi_F : \mathbf{G}(F)_{\mathbb{Q}} \simeq \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F),$$

3. Il existe un isomorphisme de spectres

$$\psi_F : \mathbf{G}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F),$$

qui est fonctoriel (dans la catégorie homotopique) pour les images directes de morphismes propres et représentables.

Pour des raisons qui deviendrons claires lors de leur construction, les morphismes ϕ et ψ seront appelés respectivement, morphisme de diagonalisation et morphisme d'induction. Il serait cependant plus juste d'appeler morphisme d'induction le morphisme inverse de ψ.

Il est intéressant de décanuler ce théorème dans le cas où $F = [X/H]$ est le champ quotient d'un schéma X par un groupe fini H. Dans ce cas on a déjà vu que $C_F^t \simeq \coprod [U^c/N_c]$, où la somme est prise sur les classes de conjugaisons de sous-groupes cycliques de H. Supposons pour commencer que chaque U^c contienne les racines $m(c)$-ème de l'unité, où $m(c)$ est l'ordre de c. Ainsi, la restriction de Λ à U^c est un faisceau constant isomorphe à $\mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})$. Il est muni d'une action du groupe N_c, ce qui en fait un faisceau localement constant sur $[U^c/N_c]$, qui est la restriction de Λ. On a alors

$$\mathbb{H}^{-*}([U^c/N_c]_{et}, \underline{\mathbf{K}} \wedge K(\mathbb{Q}(\zeta_{m(c)}), 0)) \simeq \left(\mathbf{K}_*(U^c) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})\right)^{N_c},$$

et donc, d'après le point (1) du théorème, on dispose d'un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres

$$\phi_F : \mathbf{K}_*(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}_*^{\chi}(F) \simeq \bigoplus_{c \in c(H)} \left(\mathbf{K}_*(U^c) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})\right)^{N_c}.$$

Supposons que F soit régulier. Alors comme c est un schéma en groupes de type multiplicatif sur l'ouvert de X où son ordre est inversible, le schéma U^c est encore régulier ([Th2, 6.2]). Le théorème affirme alors l'existence d'un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres

$$\phi_F : \mathbf{K}_*(F) \otimes \mathbb{Q} \simeq \bigoplus_{c \in c(H)} \left(\mathbf{K}_*(U^c) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})\right)^{N_c}.$$

Notons que cette formule est essentiellement la formule démontrée par A. Vistoli dans [V1].

Quand au point (3), il affirme l'existence d'un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels

$$\psi_F : \mathbf{G}_*(F) \otimes \mathbb{Q} \simeq \bigoplus_{c \in c(H)} \left(\mathbf{G}_*(U^c) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})\right)^{N_c}.$$

C'est aussi essentiellement la formule démontrée dans [V1].

Comme localement sur son espace de modules tout champ algébrique est de la forme $[X/H]$, on peut légitimement penser que le théorème 2.4 est obtenue par recollement des formules précédentes pour la topologie étale. Notons que c'est ce procédé de recollement qui fait apparaitre la cohomologie généralisée à valeurs dans les préfaisceaux de K-théorie ou de G-théorie. Je dois avouer ne pas connaitre de démonstration de 2.4 qui n'utilise pas cette théorie homotopique (même pour le cas des champs algébriques lisses sur $Spec\mathbb{C}$ par exemple).

Terminons par l'énoncé de la formule de Lefschetz-Riemann-Roch, reliant les morphismes ϕ et ψ. Nous en donnerons une esquisse de preuve dans la section suivante. Pour les détails, nous renvoyons à [T2, Thm. 3.25].

Pour cela, notons $\pi : C_F^t \longrightarrow F$ la projection naturelle. Comme c'est un morphismes non-ramifié, il possède un fibré conormal, $\mathcal{N}^\vee$. Considérons $\lambda_{-1}(\mathcal{N}^\vee) := \sum_i (-1)^i[\Lambda^i(\mathcal{N}^\vee)] \in \mathbf{K}_0(C_F^t)$. On pose alors (voir la définition de $d_F : \mathbf{K}_0(C_F^t) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}_0^\chi(F)$ dans le paragraphe suivant)

$$\alpha_F := d_F(\lambda_{-1}(\mathcal{N}^\vee)).$$

Une étude locale montre que α_F est partout de rang non-nul, et donc inversible dans $\underline{\mathbf{K}}_0^\chi(F)$ ([T1, 4.7]).

Théorème 2.5 *Pour tout champ algébrique F, les morphismes*

$$\psi_F : \mathbf{G}_*(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*^\chi(F)$$

$$\phi_F : \mathbf{K}_*(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}_*^\chi(F),$$

satisfaisont aux conditions suivantes.

1. *Le morphisme ϕ_F est un morphisme d'anneaux, fonctoriels pour les images réciproques.*

2. *Soit $p : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre de dimension cohomologique finie, et $x \in \mathbf{G}_m(F)$. Alors, on a*

$$\psi_{F'} \circ p_*(x) = p_* \circ \psi_F(x)$$

   dans un des trois cas suivants

   - *Le morphisme p est représentable.*
   - *Le champ F est régulier.*
   - $m = 0$.

3. *Si F est lisse et quasi-projectif, alors pour tout $x \in \mathbf{G}_*(F) \simeq \mathbf{K}_*(F)$, on a*

$$\psi(x) = \alpha_F^{-1}.\phi_F(x).$$

4. *Pour tout morphisme étale $f : F \longrightarrow F'$, et $x \in \mathbf{G}_m(F')$ on a*

$$f^* \circ \psi_{F'}(x) = \psi_F \circ f^*(x)$$

   dans l'un des cas suivant

- *Le morphisme f est représentable.*
- *Le champ F' est régulier.*
- $m = 0$.

5. *Pour tout $x \in \mathbf{G}_*(F)$ et $y \in \mathbf{K}_*(F)$, on a*

$$\psi_F(y.x) = \phi_F(y).\psi_F(x)$$

3 Démonstration du théorème principal

Pour démontrer les théorèmes 2.4 et 2.5, nous aurons besoin des résultats de descente pour la G-théorie des champs algébriques, ainsi que de la notion de quasi-enveloppe de Chow et de leur existence. Ces résultats sont démontrés dans [T2], et nous ne ferons que les rappeler.

3.1 Rappels sur les résultats de descente

La proposition suivante permet de localiser sur l'espace de modules, et ainsi de ramener de nombreux énoncés au cas des champs quotients par des groupes finis.

Proposition 3.1 *Soit $p : F \longrightarrow M$ la projection d'un champ algébrique F sur son espace de modules, et considérons le préfaisceau en spectres*

$$\begin{array}{cccc} p_*\mathbf{G}_{\mathbb{Q}} : & M_{et} & \longrightarrow & Sp \\ & U & \mapsto & \mathbf{G}(p^{-1}(U))_{\mathbb{Q}} \end{array}$$

Alors le morphisme naturel

$$\mathbf{G}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{H}(M_{et}, p_*\mathbf{G}_{\mathbb{Q}})$$

est un isomorphisme.

En particulier, le préfaisceau en spectres $p_*\mathbf{G}_{\mathbb{Q}}$ est flasque sur M_{et}.

Preuve: Voir [T2, Thm. 2.4]. $\Box$

Remarquons que la proposition précédente est fausse si l'on remplace p_* par $\mathbb{R}p_*$. En effet, il n'est pas vrai que le morphisme naturel $\mathbf{G}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{H}(F_{et}, \underline{\mathbf{G}}_{\mathbb{Q}})$ est un isomorphisme. Ceci est la principale différence avec le cas des schémas (ou même des espaces algébriques), où la G-théorie rationnelle satisfait à la propriété de descente étale. Ce phénomène explique aussi pourquoi la cohomologie usuelle des champs algébriques n'est pas un invariant assez fin pour posséder des formules de Riemann-Roch (voir la remarque qui suit [T1, 4.3]).

Soit $X \longrightarrow F$ un morphisme d'un espace algébrique X vers un champ algébrique. Nous noterons $\mathcal{N}(X/F)$ le nerf de ce morphisme. C'est un espace algébrique simplicial, où le 'm-ème étage' est donné par

$$\mathcal{N}(X/F)_m := \underbrace{X \times_F X \cdots \times_F X}_{m+1\ fois}$$

et les faces et dégénérescences sont induits par les projections et les diagonales.

Supposons que $X \longrightarrow F$ soit propre, et donc que les morphismes de transitions $\mathcal{N}(X/F)_m \longrightarrow \mathcal{N}(X/F)_p$ soient aussi des morphismes propres. On dispose alors d'un spectre simplicial, $[m] \mapsto \mathbf{G}(\mathcal{N}(X/F)_m)$ (ici il s'agit d'un objet dans la catégorie homotopique des spectres simpliciaux et non d'un objet simplicial dans la catégorie homotopique !). La colimite homotopique de ce spectre simplicial sera notée

$$\mathbf{G}(X/F) := Hocolim_{[m]\in\Delta^o}\mathbf{G}(\mathcal{N}(X/F)_m).$$

Proposition 3.2 *Soit $p : X \longrightarrow F$ un morphisme propre, avec X un espace algébrique. Alors, le morphisme naturel*

$$p_* : \mathbf{G}(X/F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}(F)$$

est un isomorphisme.

Preuve: Voir [T1, Thm. 3.9]. $\Box$

Corollaire 3.3 *Pour tout champ algébrique d'espace de modules M, il existe une isomorphisme covariant pour les morphismes propres*

$$\underline{\mathbf{G}}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(M)_{\mathbb{Q}}.$$

Preuve: Voir [T1, 3.11]. $\Box$

Pour la définition suivante, rappelons qu'un point d'un champ F est un point de son espace de modules M (ceci n'est pas la définition adoptée dans [L-M]). De plus, pour $x \in M$ un point de F, on dispose de la gerbe résiduelle en x, notée $\widetilde{x}$. C'est une gerbe sur $Speck(x)$, liée par le groupe d'isotropie de x, H_x (qui est bien défini à conjugaison près).

Définition 3.4 *Soit $p : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre (non nécessairement représentable) de champs algébriques. On dira que p est une quasi-enveloppe de Chow si pour tout point x de F', il existe un point y dans F avec $f(y) = x$, et tel que le morphisme induit*

$$p : \widetilde{y} \longrightarrow \widetilde{x}$$

admette une section après une extension finie du corps $k(x)$.

Il est important de remarquer que l'existence de la section implique que le morphisme ci-dessus induit une surjection $p : H_y \longrightarrow H_x$. Ainsi, si $p : F \longrightarrow F'$ est une enveloppe, le morphisme induit $Ip : I_F \longrightarrow I_{F'}$ sur les champs des ramifications est surjectif (i.e. induit une surjection sur les espaces de modules). Ceci montre par exemple que le morphisme naturel $X \longrightarrow [X/H]$, pour H est un groupe fini, est une quasi-enveloppe de Chow si et seulement si H est trivial.

Soit $F' \longrightarrow F$ un morphisme de champs algébriques. Alors le nerf de ce morphisme est un champ algébrique simplicial augmenté vers F, noté $\mathcal{N}(F'/F) \longrightarrow F$. Remarquons que ce n'est pas un objet simplicial de la catégorie homotopique des champs, mais un objet dans la catégorie homotopique des champs simpliciaux. Si $F' \longrightarrow F$ est un morphisme propre (disons représentable), alors on peut appliquer le foncteur covariant $\mathbf{G}$, et ontenir un spectre simplicial augmenté, $[m] \mapsto \mathbf{G}(\mathcal{N}(F'/F)_m)$. La colimite homotopique de ce spectre simplicial sera notée $\mathbf{G}(F'/F)$.

Proposition 3.5 *Soit $p : F' \longrightarrow F$ un morphisme propre représentable, qui est une quasi-enveloppe de Chow. Alors, le morphisme naturel*

$$p_* : \mathbf{G}(F'/F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbf{G}(F)_{\mathbb{Q}}$$

est un isomorphisme.

Preuve: Voir [T1, Prop. 3.13]. $\square$

3.2 Existence des enveloppes

Pour la définition suivante nous noterons Δ_+ la catégorie des ensembles (éventuellement vides) finis totalement ordonnés. Les foncteurs $\Delta_+^o \longrightarrow C$ sont exactement les objets simpliciaux augmentés dans C.

Fixons-nous un champ algébrique F_0, et considérons la catégorie des champs algébriques représentables sur F_0. Elle a pour objet les 1-morphismes représentables $F \longrightarrow F_0$. Un morphisme entre $p : F \longrightarrow F_0$ et $q : F' \longrightarrow F_0$ est la donnée d'un 1-morphisme représentable $f : F \longrightarrow F'$ et d'un 2-morphisme $h : q \circ f \Rightarrow p$. Notons cette catégorie Ch/F_0. Par définition, un champ simplicial augmenté sur F_0 est un objet simplicial de Ch/F_0.

Définition 3.6 *Soit $F_\bullet \longrightarrow F$ un champ simplicial augmenté. On dira que $F_\bullet$ est une enveloppe de F, si les propriétés suivantes sont satisfaites*

1. *Pour tout $[m] \in \Delta^o$, le champ F_m est une réunion disjointe de gerbes triviales sur des schémas quasi-projectifs (i.e. est égal à une somme de $X_m \times_S BH_m$, avec H_m un groupe fini et X_m un schéma quasi-projectif).*

2. *Pour tout morphisme dans Δ_+^o, $[m] \to [p]$, le morphisme $F_m \longrightarrow F_p$ est une somme de morphismes de la forme $f \times \rho : X_m \times_S BH_m \longrightarrow X_p \times BH_p$,*

avec $f : X_m \longrightarrow X_p$ un morphisme propre, et ρ un morphisme injectif de groupes (on parlera de morphismes cartésiens entre gerbes triviales).

3. *Pour tout $[m] \in \Delta^o$, le morphisme naturel*

$$F_m \longrightarrow Cosq^F_{m-1} Sq_{m-1}(F_\bullet)_m$$

est une quasi-enveloppe de Chow.

Comme précédemment, si $F_\bullet \longrightarrow F$ est une enveloppe, on dispose du spectre simplicial $[m] \mapsto \mathbf{G}(F_m)$, dont la colimite homotopique sera notée $\mathbf{G}(F_\bullet)$.

Proposition 3.7 *Soit F un champ algébrique, et $p : F_\bullet \longrightarrow F$ une enveloppe. Alors le morphisme naturel*

$$p_* : \mathbf{G}(F_\bullet)_\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbf{G}(F)_\mathbb{Q}$$

est un isomorphisme.

Preuve: Ceci provient de 3.5, et d'un principe général (voir [G, Thm. 4.1] par exemple). $\Box$

Le principal résultat d'existence est le suivant.

Théorème 3.8 1. *Tout champ algébrique possède une enveloppe.*

2. *Si F_0 est un champ algébrique, et $F_\bullet \longrightarrow F_0 \longleftarrow F'_\bullet$ deux enveloppes, il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} F''_\bullet \arrow[r] \arrow[d] & F_\bullet \arrow[d] \\ F'_\bullet \arrow[r] & F_0 \end{tikzcd}$$

où $F''_\bullet \longrightarrow F$ est une enveloppe. De plus, on peut choisir $F''_\bullet$ tel que pour tout $[m] \in \Delta^o$, les morphismes $F''_m \longrightarrow F_m$ et $F''_m \longrightarrow F'_m$ soient cartésiens.

3. *Si $F_0 \longrightarrow F'_0$ est un morphisme représentable et propre de champs algébriques, il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} F_\bullet \arrow[r] \arrow[d, "p"] & F'_\bullet \arrow[d] \\ F_0 \arrow[r] & F'_0 \end{tikzcd}$$

avec $F_\bullet \longrightarrow F_0$ et $F'_\bullet \longrightarrow F'_0$ des enveloppes. De plus, on peut choisir p de telle sorte que $F_m \longrightarrow F'_m$ soit cartésien pour tout $[m] \in \Delta^o$.

Preuve: Comme la notion de quasi-enveloppe de Chow est stable par changements de bases et par compositions, il nous suffit de montrer que tout champ algébrique F admet une quasi-enveloppe de Chow $F' \longrightarrow F$. En effet, la construction d'une enveloppe pour F provient alors des méthodes de construction de [SGA 4, V^{bis}.5.1.7]. Les assertions concernant l'aspect cartésien des morphismes provient du fait qu'un morphisme représentable entre gerbes triviales $X \times_S BH \longrightarrow Y \times_S BK$, devient cartésien après un changement de base fini et étale de X. Ainsi, dans la construction de l'enveloppe, on peut par induction rendre tous les morphismes de faces cartésiens. De plus, comme les enveloppes sont des champs simpliciaux σ-scindés, les dégénérescences sont des facteurs directs, et donc clairement cartésiens.

Le champ F étant de type fini sur S, il provient par changement de base d'un champ de type fini sur $Spec\mathbb{Z}$. Comme les quasi-enveloppes de Chow sont stables par changements de bases, il s'en suit que l'on peut supposer que $S = Spec\mathbb{Z}$. De plus, comme l'immersion fermée $F_{red} \hookrightarrow F$ est une quasi-enveloppe de Chow, on peut aussi supposer que F est réduit. On peut aussi clairement supposer que F est intègre.

En procédant par récurrence noethérienne, il nous suffit de contruire $F' \longrightarrow F$, propre et surjectif, qui est génériquement une quasi-enveloppe de Chow.

Comme F est génériquement une gerbe sur un schéma, le morphisme de normalisation $F' \longrightarrow F$ est génériquement une quasi-enveloppe. On peut donc supposer que F est normal.

Soit $F \longrightarrow M$ l'espace de modules de M, et $X \longrightarrow M$ un morphisme génériquement fini, propre et surjectif, avec X un schéma normal et quasi-projectif. Par [E, Thm. 2.1], on peut même supposer qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr] & F \arrow[d] \\ & M \end{tikzcd}$$

Soit $F_0 := (F \times_M X)_{red} \longrightarrow F$, et $F' \longrightarrow F$ la normalisation de F_0. Le morphisme $F' \longrightarrow F$ est clairement génériquement une quasi-enveloppe de Chow. Il nous reste donc à montrer que F' est une gerbe sur X.

Notons M' l'espace de modules de F'. Alors $M' \longrightarrow X$ est un morphisme fini et birationnel. Comme M' et X sont normaux, c'est un isomorphisme. Ainsi, l'espace de modules de F' est X. De plus, par construction, le morphisme naturel $F' \longrightarrow X$ possède une section.

Lemme 3.9 *Soit F un champ algébrique intègre et normal. Si la projection sur son espace de modules $F \longrightarrow M$ possède une section, alors F est une gerbe sur M.*

Preuve: Comme l'assertion est locale pour la topologie étale sur M, on peut supposer que $F = [X/H]$ est un champ quotient d'un schéma normal et intègre

X par l'action d'un groupe fini H. L'existence de la section $s : M = X/H \longrightarrow F$ se traduit par un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ & X/H \end{tikzcd}$$

où q est un H-torseur, et f est H-équivariant. Comme q est étale, f est non-ramifié. Or Y et X sont intègres normaux et de même dimension, et donc f est étale. Ceci implique que p est étale, et donc que l'action se factorise par une action libre de H/H_0, où H_0 est le noyau de l'action de H sur X. $\Box$

Ce lemme implique que F' est une gerbe sur X. De plus, comme cette gerbe est neutre, elle est de la forme BH, où $H \longrightarrow X$ est un schéma en groupes fini et étale sur X. Ainsi, en effectuant un changement de base fini et étale de X, on peut supposer que $F' \simeq X \times BH$. Ce qui achève la démonstration. $\Box$

Remarque: La preuve précédente montre aussi que pour tout champ algébrique F, il existe un morphisme représentable et fini $F_0 \longrightarrow F$, qui est une quasi-enveloppe de Chow, et avec $F_0 = \coprod X \times_S BH$.

3.3 Démonstration du théorème

Construction de ϕ_F:

Rappelons que l'on dispose du faisceau des caractères $\mathcal{X}$ sur $(C^t_F)_{et}$, et qu'il s'agit d'un faisceau fini et localement constant pour la topologie étale. On dispose aussi du préfaisceau en catégories abéliennes

$$\begin{array}{cccc} QCoh : & (C^t_F)_{et} & \longrightarrow & CatAb \\ & U & \mapsto & QCoh(U) \end{array}$$

Notons $\prod_{\mathcal{X}} QCoh$ le préfaisceau en catégories exactes défini par

$$\begin{array}{cccc} \prod_{\mathcal{X}} QCoh : & (C^t_F)_{et} & \longrightarrow & CatAb \\ & U & \mapsto & (\prod_{\mathcal{X}} QCoh)(U) := \prod_{\mathcal{X}(U)} QCoh(U) \end{array}$$

Remarquons que ce préfaisceau en catégories n'est pas un champ. Le champ qui lui est associé sera noté $\mathcal{X} \otimes QCoh$. La catégories des sections cartésiennes de ce champ sur $(C^t_F)_{et}$ sera notée $\mathcal{X} \otimes QCoh(C^t_F)$. C'est naturellement une catégorie abélienne.

Commençons par construire un foncteur exact $d_F : QCoh(C^t_F) \longrightarrow \mathcal{X} \otimes QCoh(C^t_F)$, construit par diagonalisation de l'action du champ en groupes universel $\mathcal{C}^t_F \longrightarrow C^t_F$.

Pour cela, remarquons que tout faisceau quasi-cohérent sur C^t_F arrive avec une action naturelle de $\mathcal{C}^t_F$. Ceci définit un foncteur exact

$$QCoh(C^t_F) \longrightarrow QCoh(C^t_F, \mathcal{C}^t)$$

de la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur C^t_F vers celle des faisceaux quasi-cohérents sur C^t_F munis d'une action de $\mathcal{C}^t_F$. On utilise alors le lemme suivant.

Lemme 3.10 *Soit F un champ algébrique, et $C \longrightarrow F$ un champ en groupes fini de type multiplicatif. Notons $\mathcal{X}$ son faisceau des caractères sur F_{et}. Alors il existe une équivalence naturelle de catégories abéliennes*

$$QCoh(F, C) \simeq \mathcal{X} \otimes QCoh(F)$$

où $QCoh(F, C)$ est la catégorie des faisceaux quasi-cohérents C-équivariants sur F, et $\mathcal{X} \otimes QCoh(F)$ la catégorie des sections globales cartésiennes du champ associé au préfaisceau en catégories sur F, $U \mapsto \prod_{\mathcal{X}(U)} QCoh(U)$.

Preuve: Soit V un faisceau quasi-cohérent C-équivariant sur F, et $U \longrightarrow F$ un morphisme étale. La restriction de V à U possède une action du schéma en groupes fini C_U. Choisissons U tel que C_U soit constant sur U. Alors le faisceau se décompose en une somme directe

$$V_U \simeq \bigoplus_{\chi \in \mathcal{X}(U)} V_U^{(\chi)}$$

où $V_U^{(\chi)}$ est le sous-faisceau où C_U opère par le caractère χ. On considère alors $\prod_{\chi \in \mathcal{X}(U)} V_U^{(\chi)} \in \prod_{\mathcal{X}(U)} QCoh(U) \simeq \mathcal{X} \otimes QCoh(U)$. On peut vérifier que les cocycles de V sur F_{et} induisent des cocycles pour les $\prod_{\chi \in \mathcal{X}(U)} V_U^{(\chi)}$ lorsque U varie dans F_{et}. Ils se recollent donc un objet bien défini dans $\mathcal{X} \otimes QCoh(F)$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que ceci définit bien un foncteur exact

$$QCoh(F, C) \longrightarrow \mathcal{X} \otimes QCoh(F).$$

Pour montrer que c'est une équivalence, on utilise que $U \mapsto QCoh(U, C_U)$ et $U \mapsto \mathcal{X} \otimes QCoh(U)$ sont tous deux des champs sur F_{et}. On peut donc remplacer F par n'importe quel $U \longrightarrow F$ qui est étale et surjectif. On peut donc supposer que F est un schéma, et que C est diagonalisable. Le résultat est alors immédiat. $\Box$

On vient donc de construire un foncteur exact $d_F : QCoh(C^t_F) \longrightarrow \mathcal{X} \otimes QCoh(C^t_F)$. Ce foncteur induit donc un morphisme sur les spectres de K-théorie des complexes parfaits de faisceaux quasi-cohérents

$$d_F : \mathbf{K}(C^t_F) \longrightarrow \mathbf{K}(\mathcal{X} \otimes C_{parf}QCoh(C^t_F)).$$

On utilise alors le fait suivant (voir aussi [T2, Prop. 1.6]). Soit C un site, muni d'un préfaisceau en catégories compliciale de Waldhausen $\mathcal{E}$ ([Th]), de section globales cartésiennes $\mathcal{E}(C)$. Notons $\underline{\mathbf{K}}$ le préfaisceau en spectres $U \mapsto \mathbf{K}(\mathcal{E}(U))$. Alors il existe un morphisme naturel

$$\mathbf{K}(\mathcal{E}(C)) \longrightarrow \Gamma(C, \underline{\mathbf{K}}) \longrightarrow \mathbb{H}(C, \underline{\mathbf{K}}).$$

Pour nous, ceci implique qu'il existe un morphisme naturel

$$\mathbf{K}(\mathcal{X} \otimes C_{parf}QCoh(C_F^t)) \longrightarrow \mathbb{H}((C_F^t)_{et}, \mathcal{X} \otimes \underline{\mathbf{K}}).$$

Or, $(\mathcal{X} \otimes \underline{\mathbf{K}})_{\mathbb{Q}} \simeq \underline{\mathbf{K}} \wedge K(\mathbb{Q}[\mathcal{X}], 0)$. On peut donc composer avec la projection naturelle $\mathbb{Q}[\mathcal{X}] \longrightarrow \Lambda$ pour obtenir un morphisme

$$\mathbf{K}(\mathcal{X} \otimes C_{parf}QCoh(C_F^t))_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{H}((C_F^t)_{et}, \mathcal{X} \otimes \underline{\mathbf{K}}_{\mathbb{Q}}) \longrightarrow \mathbb{H}((C_F^t)_{et}, \underline{\mathbf{K}}_{\Lambda}).$$

En conclusion, on trouve un morphisme de spectres

$$d_F : \mathbf{K}(C_F^t) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F).$$

Il est facile de vérifier que ce morphisme est un morphisme de spectres en anneaux.

On définit ϕ_F par la composition

$$\phi_F : \ \mathbf{K}(F) \xrightarrow{\pi^*} \mathbf{K}(C_F^t) \xrightarrow{d_F} \underline{\mathbf{K}}^{\chi}(F)$$

où $\pi : C_F^t \longrightarrow F$ est la projection naturelle.

Pour montrer que le morphisme ϕ_F est un isomorphisme lorsque F est régulier, on peut utiliser 3.1 (car $\mathbf{G}(F) \simeq \mathbf{K}(F)$), et donc localiser (pour la topologie étale) le problème sur l'espace de modules M de F. On peut donc supposer que $F = [X/H]$ est un champ quotient d'un schéma par un groupe fini. En effectuant un changement de base par un morphisme étale $M' \longrightarrow M = X/H$, on peut aussi supposer que X contient les racines m-ème de l'unité, où m est l'ordre de H. On se ramène donc au cas où

$$\underline{\mathbf{K}}_*^{\chi}(F) \simeq \bigoplus_{c \in c(H)} \left(\mathbf{K}_*(U^c) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})\right)^{N_c}.$$

Le morphisme $\mathbf{K}_*(F) \longrightarrow \left(\mathbf{K}_*(U^c) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})\right)^{N_c}$ est alors construit de la façon suivante. On dipose alors d'un morphisme de champ

$$j_c : [U^c/N_c] \longrightarrow [X/H].$$

Ce morphisme induit un morphisme en K-théorie

$$j_c^* : \mathbf{K}_*(F) \longrightarrow \mathbf{K}_*([U^c/N_c]).$$

Par restriction de N_c à c, il existe aussi un morphisme naturel $\mathbf{K}_*([U^c/N_c]) \longrightarrow \mathbf{K}_*([U^c/c])^{N_c}$. Or, comme c opère trivialement sur U^c et que c est diagonalisable sur U^c, on obtient $\mathbf{K}_*([U^c/c])_{\mathbb{Q}} \simeq \mathbf{K}_*(U^c) \otimes \mathbb{Q}[c^*]$, où $c^* = Hom_{gp}(c, \mathbb{C}^*)$. En utilisant la projection naturel $\mathbb{Q}[c^*] \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})$, on en déduit le morphisme cherché

$$\mathbf{K}_*(F) \longrightarrow \left(\mathbf{K}_*(U^c) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})\right)^{N_c}.$$

Pour montrer que la somme de ces morphismes

$$\mathbf{K}(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \bigoplus_{c \in c(H)} \left(\mathbf{K}_*(U^c) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})\right)^{N_c}$$

est un isomorphisme on procède exactement comme dans [V1], avec de modestes changements pour tenir compte du fait que l'on est en caractéristiques mixtes.

Démonstration de (2)*:*

Nous ne construirons pas ϕ_F. En effet, il suffit de répéter la construction de d_F mais en remplaçant les faisceaux quasi-cohérents par des faisceaux cohérents. On obtient de cette façon un foncteur exact

$$d_F : Coh(C_F^t) \longrightarrow \mathcal{X} \otimes Coh(C_F^t).$$

Par les mêmes arguments que précédemment, ce foncteur induit un morphisme de spectres

$$\mathbf{G}(C_F^t) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F).$$

En composant avec $\pi^* : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \mathbf{G}(C_F^t)$, qui existe car π est de Tor-dimension finie, on obtient

$$\phi_F : \mathbf{G}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F).$$

Lorsque F est une gerbe, on peut de nouveau invoquer 3.1, et donc supposer que $F = [X/H]$, où H opère trivialement sur X. De plus, π est alors étale, et le morphisme ϕ_F compatible avec les suites exactes longues de localisation. Par dévissage on se ramène donc au cas où X est le spectre d'un corps contenant suffisement de racines de l'unité. La formule dans ce cas est alors bien connue.

Construction de ψ_F*:*

Le lemme fondamental est le suivant.

Lemme 3.11 *Notons Gbt/F, la sous-catégorie des champs propres et représentables sur F, qui sont des gerbes triviales, et des* 1*-morphismes propres et cartésiens. Alors, il existe un isomorphisme ϕ (dans la catégorie homotopique des préfaisceaux en spectres sur $(Gbt/F)^o$) entre les deux préfaisceaux en spectres suivants*

$$\begin{array}{ccc} (Gbt/F)^o & \longrightarrow & Sp \\ F' & \mapsto & \mathbf{G}(F')_{\mathbb{Q}} \\ F' & \mapsto & \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F') \end{array}$$

De plus, pour tout $F' \in Gbt/F$, le morphisme $\phi : \mathbf{G}(F') \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(F')$ coincide avec le morphisme $\phi_{F'}$ de (2) 2.4.

Preuve: Comme les gerbes sont représentables sur F, leurs groupes d'isotropie sont des sous-groupes de ceux de F. Ainsi, il existe un entier n qui est un multiple de tous les ordres des groupes H liant les gerbes de Gbt/F. Soit m le plus grand entier divisant n et premier avec la caractéristique de $K(S)$ (le corps des fonctions de S). Soit $S' \longrightarrow S$ le schéma en groupes des racines m-ème de l'unité. Alors, en effectuant une descente galoisienne de S' à S, on peut supposer que μ_m est un faisceau constant sur S.

Soit $X \times_S H \in Gbt/F$, et c un sous-groupe cyclique de H. Notons X_c le sous-schéma où l'ordre de c est inversible. Comme S contient suffisement de racines de l'unité, X_c aussi, et c est diagonalisable sur X_c. Ainsi, son faisceau des caractères est constant égal à $c^* \simeq \mathbf{Z}/m_c$. Notons Λ_c le quotient $\mathbb{Q}[c^*] \longrightarrow \Lambda$ correspondant à $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/m_c] \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_{m_c})$.

Soit N_c le normalisateur de c dans H. Ce groupe opère par conjugaison sur Λ_c. Il est alors facile de vérifier qu'il existe un équivalence faible naturelle

$$\alpha : \prod_{c \in c(H)} (\mathbf{G}(X_c) \otimes \Lambda_c)^{N_c} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(X \times_S BH)$$

(ici $(\mathbf{G}(X_c) \otimes \Lambda_c)^{N_c} := Holim_{N_c}(\mathbf{G}(X_c) \otimes \Lambda_c))$.

Pour $f \times \rho : X \times_S BH \longrightarrow Y \times_S BK$ un morphisme de Gbt/F, on définit une image directe

$$\begin{array}{cccc} (f \times \rho)_* : & (\mathbf{G}(X_c) \otimes \Lambda_c)^{N_c} & \longrightarrow & (\mathbf{G}(Y_{\rho(c)}) \otimes \Lambda_{\rho(c)})^{N_{\rho(c)}} \\ & \mathcal{F} \otimes x & \mapsto & f_*(\mathcal{F})^{[K:H]} \otimes \rho(x) \end{array}$$

En d'autres termes, on a $(f \times \rho)_* := ([K : H] \times f_*) \otimes \rho$. Remarquons que $\rho : \Lambda_c \longrightarrow \Lambda_{\rho(c)}$ est un isomorphisme.

Ceci permet de construire une image directe

$$(f \times \rho)_* : \prod_{c \in c(H)} (\mathbf{G}(X_c) \otimes \Lambda_c)^{N_c} \longrightarrow \prod_{c \in c(K)} (\mathbf{G}(Y_c) \otimes \Lambda_c)^{N_c}$$

(par définition, les composantes de $(f \times \rho)_*$ sont nulles pour $c \in c(K)$ qui n'est pas l'image de $c \in c(H)$).

On peut alors vérifier que l'équivalence α est fonctorielle pour les images directes de morphismes de Gbt/F. On identifie ainsi $X \times_S BH \mapsto \underline{\mathbf{G}}^{\chi}(X \times_S BH)$ à $X \times_S BH \mapsto \prod_{c \in c(H)} (\mathbf{G}(X_c) \otimes \Lambda_c)^{N_c}$.

On construit alors $\mathbf{G}(X \times_S BH) \longrightarrow \prod_{c \in c(H)} (\mathbf{G}(X_c) \otimes \Lambda_c)^{N_c}$ exactement par le même procédé de construction que celui utilisé pour définir ϕ dans le point (1) de 2.4. C'est alors un exercice de vérifier que ce morphisme est covariant pour les images directes de morphismes de Gbt/F (il s'agit d'utiliser que le caractère d'une représentation induite est égal au caractère induit). $\square$

Si $F_\bullet \longrightarrow F$ est une enveloppe, la transformation ϕ permet de définir un morphisme de spectres simpliciaux, entre $[m] \mapsto \mathbf{G}(F_m)$ et $[m] \mapsto \underline{\mathbf{G}}^\chi(F_m)$. En passant à la colimite homotopique, on obtient un morphisme

$$\mathbf{G}(F_\bullet) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^\chi(F_\bullet).$$

De plus, le deuxième membre possède naturellement un morphisme vers $\underline{\mathbf{G}}^\chi(F)$. On obtient ainsi

$$\mathbf{G}(F_\bullet)_\mathbb{Q} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^\chi(F),$$

et en utilisant 3.7

$$\psi_F : \mathbf{G}(F)_\mathbb{Q} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}^\chi(F).$$

On peut vérifier que ce morphisme est indépendant de l'enveloppe choisie, car deux telles enveloppes sont dominées par une troisième. De plus, par construction et par 3.11, ce morphisme est clairement covariant pour les morphismes propres et représentables.

Pour montrer que ψ_F est un isomorphisme, on peut procéder par récurrence noethérienne et se ramener, à l'aide de la suite exacte longue de localisation, au cas où F est une gerbe. De plus, par une localisation sur l'espace de modules on peut même supposer que F est une gerbe triviale. On choisissant l'enveloppe triviale pour F, on en déduit que dans ce cas $\psi_F = \phi_F$, et donc par le point (1), ψ_F est un isomorphisme.

3.4 Formule de Lefschetz-Riemann-Roch

Dans ce paragraphe nous donnerons une esquisse de preuve de 2.5.

Commençons par remarquer que le théorème 2.5 est vrai pour les champs de la forme $[X/H]$, avec H un groupe fini opérant sur un schéma quasi-projectif X. Ceci se vérifie directement à la main (c'est essentiellement la formule de Lefschetz-Riemann-Roch pour l'action d'un groupe fini).

(1) Il n'y a rien à démontrer.

(2) Soit $f : F \longrightarrow F'$ propre, et $x \in \mathbf{G}_m(F)$. Le cas où f est représentable est déjà connu par 2.4.

Supposons que F soit régulier. Notons $p : F_0 \longrightarrow F$ une quasi-enveloppe de Chow, avec p représentable fini, et F_0 une gerbe triviale. Comme F est régulier, on dispose de la formule de projection

$$p_*p^*(x) = p_*(1).x$$

On montre tout d'abord que $p_*(1)$ est inversible. Comme F est régulier, on dispose d'un isomorphisme d'anneaux (2.4)

$$\phi_F : \mathbf{K}_0(F)_\mathbb{Q} \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}_0^\chi(F).$$

Ainsi, le fait que $p_*(1)$ soit inversible dans $\mathbf{K}_0(F)_{\mathbb{Q}}$ est en fait une assertion locale pour la topologie étale de l'espace de modules M. On peut donc supposer que $F = [X/H]$. On utilise alors que $p_* \circ \psi_{F_0} = \alpha_F^{-1}.\phi_F \circ p_*$. Ainsi, il suffit de montrer que $p_*(1) \in \underline{\mathbf{K}}_0^{\chi}(F)$ est inversible, ce qui provient directement du fait que le morphisme $C^t_{F_0} \longrightarrow C^t_F$ est fini et surjectif (car p est une quasi-enveloppe de Chow), et donc que $p_*(1)$ est partout de rang non-nul sur C^t_F.

On vient donc de voir que $p_*(1)$ est inversible, et donc ceci entraine que $p_* : \mathbf{G}_*(F_0) \longrightarrow \mathbf{K}_*(F)_{\mathbb{Q}}$ est surjectif. Ceci permet de remplacer F par F_0, et même de supposer que F et F' sont des gerbes triviales (car on peut prendre F_0 qui domine une autre quasi-enveloppe de Chow $F'_0 \to F'$). Ce cas est alors un cas particulier du cas où F et F' sont des quotients par des groupes finis.

Enfin, supposons F quelconque, mais $x \in \mathbf{G}_0(F)$. Un raisonnement par récurrence sur la codimension du support montre aussi que $p_* : \mathbf{G}_0(F_0) \longrightarrow \mathbf{G}_0(F)_{\mathbb{Q}}$ est surjectif. On peut alors refaire l'argumentation précédente.

(3) Supposons que F soit lisse (connexe) et quasi-projectif. Alors on peut écrire $u : F \longrightarrow F_0$, où F_0 est le champ quotient d'un schéma quasi-projectif X par Gl_m, et u est étale et fini ([E, Cor. 2.3]). Soit $F' \longrightarrow F_0$ une quasi-enveloppe de Chow, avec p représentable fini, et F' une gerbe triviale. Comme F_0 est un quotient par Gl_m d'un schéma quasi-projectif, p est un morphisme fortement projectif (i.e. se factorise en une immersion fermé suivie de la projection d'un fibré projectif associé à un fibré vectoriel sur F_0). On considère $p : F' \times_{F_0} F \longrightarrow F$, qui est encore une quasi-enveloppe et fortement projectif. De plus, $F'' := F' \times_{F_0} F$ étant une gerbe, on peut effectuer un changement de base fini de son espace de modules, et supposer que F'' est une gerbe triviale. Ainsi, on a trouvé $p : F'' \longrightarrow F$, qui est une composition de morphismes fortement projectifs, ainsi qu'une quasi-enveloppe de Chow, et avec F'' une gerbe triviale. Par les techniques standard (voir par exemple [T1, Lem. 4.2] étape (a)) on peut montrer que

$$p_* \circ \phi_{F''} = \alpha_F^{-1}.\phi_F \circ p_*.$$

Comme de plus, comme $p_* : \mathbf{G}_*(F'') \longrightarrow \mathbf{G}_*(F)_{\mathbb{Q}}$ est surjectif, et que $p_* \circ \phi_{F''} = p_* \circ \psi_{F''} = \psi_F \circ p_*$, ceci montre que

$$\psi_F = \alpha_F^{-1}.\phi_F.$$

(4) utilise les mêmes méthodes de réduction au cas des gerbes triviales.

(5) Soit $p : F_\bullet \longrightarrow F$ une enveloppe, et $x \in \mathbf{G}_*(F)_{\mathbb{Q}}$ et $y \in \mathbf{K}_*(F)_{\mathbb{Q}}$. Par 3.7, on écrit $x = p_*(z)$. Alors, par la formule de projection, on a $x.y = p_*(z.p^*(y))$. Notons $\phi : \mathbf{G}_*(F_\bullet)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*^{\chi}(C^t_{F_\bullet})$ le morphisme construit dans la preuve du point (3) de 2.4. Alors, comme ϕ est compatible avec les produits et les images réciproques, et par la formule de projection, on a

$$\phi(z.p^*(y)) = \phi(z).p^*\phi(y).$$

Or, par définition, on $\psi_F(x.y) = \psi_F(p_*(x.p^*(y))) = p_*(\phi(z).p^*\phi_F(y)) = p_*(\psi(x)).\phi_F(y) = \psi(x).\phi(y)$. $\square$

4 Deux applications

4.1 K-théorie équivariante

La première application de 2.4 que nous proposons concerne les questions (2.4), (3.4) et (3.6) posées dans [V2], ainsi que leurs généralisations au cas des champs de Deligne-Mumford.

Signalons que la conjecture (2.4) a déjà été démontrée en utilisant les groupes de Chow équivariants ([E-G]). De plus, dans un travail récent ([V-V]), A. Vistoli et G. Vezzosi donnent une description générale de la K-théorie équivariante d'une action avec stabilisateurs finis (éventuellement non-réduits), ce qui leur permet de résoudre aussi les conjectures (3.4) et (3.6). Cette formule est donc plus générale que les formules que nous donnons dans ce paragraphe, et les techniques de démonstration très différentes de celle que nous utilisons. Dans le cas où les stabilisateurs sont réduits, cette formule tensorisé par $\mathbb{Q}$ est essentiellement équivalente à la formule 4.6. D'un autre coté, les corollaires 4.1 et 4.4 restent vrais pour des champs de Deligne-Mumford qui ne sont pas nécessairement des quotients par des groupes algébriques, et pour lesquels [V-V] ne peut plus s'appliquer.

Fixons nous G un schéma en groupes plat et de type fini sur S, opérant sur un schéma X (de type fini sur S). On suppose que l'action et propre, et que les stabilisateurs de cette action sont des schémas en groupes finis et réduits. Dans ce cas, le champ quotient $F = [X/G]$ est un champ algébrique de Deligne-Mumford séparé sur S.

L'espace de modules de F est donc $M = X/G$, et $\mathbf{G}_*(F)$ est alors la G-théorie équivariante de X (i.e. la K-théorie de la catégorie abéliennne des G-faisceaux cohérents sur X). Rappelons que si X est un schéma régulier, alors le morphisme

$$\mathbf{K}_*(F) \longrightarrow \mathbf{G}_*(F)$$

est un isomorphisme.

Nous noterons $p : F \longrightarrow M$ la projection sur l'espace de modules.

Corollaire 4.1 *Il existe un décomposition*

$$\mathbf{G}_*([X/G])_{\mathbb{Q}} \simeq \underline{\mathbf{G}}_*([X/G])_{\mathbb{Q}} \oplus \underline{\mathbf{G}}_*^{\chi\neq 1}([X/G]) \simeq \mathbf{G}_*(X/G)_{\mathbf{Q}} \oplus \underline{\mathbf{G}}_*^{\chi\neq 1}([X/G]).$$

Cette décomposition est fonctorielle pour les morphismes propres représentables.

De plus la projection sur le premier facteur correspond au morphisme naturel ([T2, Prop. 1.6]) $\mathbf{G}_*([X/G])_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*([X/G])_{\mathbb{Q}}$.

Preuve: On utilise 2.4, et le fait que $C_F^t \longrightarrow F$ possède une section. Cette section donne un décomposition $C_F^t \simeq F \coprod (C_F^t)^{\neq 1}$, qui induit la décomposition voulue. Elle vérifie clairement les hypthèses de fonctorialité.

La dernière assertion provient du fait que ψ_F commute avec la localisation étale (2.5 (4)). $\square$

On peut en réalité être un peu plus explicite lorsque $S = Speck$ est le spectre d'un corps, algébriquement clos pour simplifier, et G est affine et lisse.

Notons I_F^t le champ des ramifications modérées de F. C'est le champ classifiant les couples (s,h), où s est un objet de F et h est un automorphisme de s, d'odre premier à la caractèristique de k. On dispose d'un morphisme étale et fini $q : I_F^t \longrightarrow C_F^t$ qui envoie (s,h) sur $(s, <h>)$, où $<h>$ est le sous-groupe engendré par h. On peut alors vérifier qu'il existe un isomorphisme de faisceau en $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbres sur C_F^t ($\overline{\mathbb{Q}}$ est la clotûre algébrique de $\mathbb{Q}$)

$$q_*(\overline{\mathbb{Q}}) \simeq \Lambda \otimes \overline{\mathbb{Q}}.$$

Cet isomorphisme n'est pas naturel car il demande de choisir un plongement $\mu_\infty(k) \hookrightarrow \mu_\infty(\overline{\mathbb{Q}})$, que nous fixerons une bonne fois pour toute.

De l'isomorphisme ci-dessus, on déduit un nouvel isomorphisme

$$\underline{\mathbf{G}}_*(I_F^t)_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \underline{\mathbf{G}}_*^{\chi}(F)_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

En appliquant 2.4, on trouve donc un isomorphisme

$$\mathbf{G}_*(F)_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \underline{\mathbf{G}}_*(I_F^t)_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

Soit T le schéma des éléments de G d'ordre fini et premier à la caractéristique de k. Par [SGA 3, XII 5.5], ce schéma s'écrit comme une réunion disjointe de ses orbites

$$T = \coprod_{g \in c(G)} G/Z_g,$$

où $c(G)$ est un ensemble de représentants de l'ensemble des classes de conjugaisons d'éléments d'ordre fini et premier à $cark$, et Z_g est le centralisateur de g dans G. De plus, l'action de G sur T par conjugaison, correspond à l'action naturelle de G sur les espaces homogènes G/Z_g. On peut alors vérifier que I_F^t est donné par

$$I_F^t \simeq \coprod_{g \in c(G)} [X^g/Z_g]$$

où X^g est le sous-schéma des points fixes de g sur X.

On en conclut donc un isomorphisme

$$\mathbf{G}_*(F)_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \prod_{g \in c(G)} \underline{\mathbf{G}}_*([X^g/Z_g])_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \prod_{g \in c(G)} \mathbf{G}_*(X^g/Z_g)_{\overline{\mathbb{Q}}}$$

Corollaire 4.2 *Si $S = Speck$ est le spectre d'un corps algébriquement clos, et G est affine et lisse sur k, alors il existe un isomorphisme*

$$\mathbf{G}_*([X/G])_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \prod_{g \in c(G)} \mathbf{G}_*(X^g/Z_g)_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

Rappelons aussi que l'on dispose du caractère de Chern

$$Ch : \mathbf{K}_0([X/G]) \longrightarrow CH([X/G])_{\mathbf{Q}} := H^*([X/G]_{et}, \underline{K}_* \otimes \mathbb{Q}).$$

Ce caractère de Chern se factorise par

$$\mathbf{K}_0([X/G]) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}_0([X/G]) \longrightarrow CH([X/G])_{\mathbf{Q}}.$$

Lorsque X est de plus un schéma régulier, alors $Ch : \underline{\mathbf{K}}_0([X/H])_{\mathbf{Q}} \longrightarrow CH([X/G])_{\mathbb{Q}}$ est un isomorphisme ([T2, Cor. 3.38]).

Le corollaire suivant répond positivement à la conjecture (3.4) de [V2].

Corollaire 4.3 *Si X est régulier, il existe un isomorphisme d'anneaux*

$$\mathbf{K}_0([X/G])_{\mathbb{Q}} \simeq CH([X/G])_{\mathbb{Q}} \oplus \underline{\mathbf{K}}_0^{\chi \neq 1}([X/G]).$$

De plus la projection sur le premier facteur correspond au caractère de Chern.

Preuve: Il suffit d'utiliser 2.4 et le fait que le caratère de Chern induit un isomorphisme d'anneaux

$$\underline{\mathbf{K}}_0([X/H])_{\mathbf{Q}} \longrightarrow CH([X/G])_{\mathbb{Q}}.$$

$\square$

Pour prendre en compte la K-théorie supérieure nous aurons besoin d'une petite digression sur les groupes de Chow supérieurs des champs algébriques.

Pour tout champ algébrique F (toujours sur un corps), on dispose d'un complexe de préfaisceau

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{Z}^i : & F_{et} & \longrightarrow & C(Ab) \\ & U & \mapsto & \mathbf{Z}^i(U) \end{array}$$

où $\mathbf{Z}^i(U)$ est le complexe de cycles de codimension i défini dans [B]. On pose alors

$$CH^i(F, j) := H^{-j}(F_{et}, \mathbf{Z}^i \otimes \mathbb{Q}).$$

On notera aussi $CH(F, \bullet) := \oplus_{i,j} CH^i(F, j)$.

Ces groupes de Chow supérieurs possèdent de nombreuses bonnes propriétés. Nous les énonçons sans démonstrations car le lecteur pourra trouver lui même les arguements sans aucunes difficultés. On doit aussi pouvoir trouver les arguments dans [Jo].

1. Il existe des images directes par morphismes propres quelconques, ainsi que des images réciproques pour des morphismes plats quelconques.

2. Les fonctorialités ci-dessus satisfont aux formules usuelles de projection et de transfert.

3. Il existe une suite exacte longue de localisation.

4. Si F est régulier alors $CH(F, \bullet)$ devient un anneau bigradué. De plus, il existe alors un caractère de Chern

$$Ch : \underline{\mathbf{K}}_m(F) \longrightarrow CH(F, m)$$

qui rationnellement est un isomorphisme d'anneaux.

5. Pour tout champ algébrique, et $p : F \longrightarrow M$ sa projection sur son espace de modules, le morphisme $p_* : CH(F, \bullet) \longrightarrow CH(M, \bullet)$ est un isomorphisme. En particulier les groupes $CH(F, 0)$ coincident modulo torsion avec les groupes de Chow usuel.

Remarque: Nous avons défini le caractère de Chern, $Ch : \underline{\mathbf{K}}_*(F) \longrightarrow CH(F, *)$. Cependant, nous pouvons composer avec le morphisme naturel $\mathbf{K}_*(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}_*(F)$, pour obtenir $Ch : \mathbf{K}_*(F) \longrightarrow CH(F, *)$.

Revenons au cas où $F = [X/G]$ est le quotient d'un schéma X par un groupes affine et lisse. Alors 2.4 et les propriétés énoncées ci-dessus impliquent le corollaire suivant.

Corollaire 4.4 *Si X est régulier, il existe un isomorphisme d'anneaux gradués*

$$\mathbf{K}_*([X/G])_{\mathbb{Q}} \simeq CH([X/G], *) \oplus \underline{\mathbf{K}}_*^{\chi \neq 1}([X/G]).$$

De plus la projection sur le premier facteur correspond au caractère de Chern.

On peut même expliciter le terme $\underline{\mathbf{K}}_*^{\chi \neq 1}([X/G])$ en fonctions des groupes supérieurs de Chow des points fixes. On obtient alors une généralisation de [V2, 3.4] à la K-théorie supérieure.

Corollaire 4.5 *Soit $F = [X/G]$ le champ quotient d'une schéma en groupes affine et lisse sur un corps algébriquement clos, opérant sur un schéma régulier X. Notons $c(G)$ une ensemble de représentants de l'ensemble des classes de conjugaisons d'éléments de G d'ordre fini premier à la caractéristique de k. Pour $g \in c(G)$, notons aussi X^g le sous-schéma des points fixes, et Z_g le centralisateur de g dans G. Alors il existe un isomorphisme de $\overline{\mathbb{Q}}$-algèbres*

$$\mathbf{K}_*([X/G])_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \prod_{g \in c(G)} CH([X^g/Z_g], \bullet)_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

Preuve: Rappelons qu'il existe un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbf{K}_*(F)_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq \underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t)_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

En composant avec le caractère de Chern $Ch : \underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t)_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq CH(I_F^t, *)_{\overline{\mathbb{Q}}}$, on en déduit un isomorphisme

$$\mathbf{K}_*(F)_{\overline{\mathbb{Q}}} \simeq CH(I_F^t, *)_{\overline{\mathbb{Q}}}.$$

On conclut alors en remarquant que $I_F^t \simeq \coprod_{g \in c(G)} [X^g/Z_g]$. $\square$

Enfin, lorsque G est abélien, le faisceau Λ est alors un faisceau constant sur C_F^t. On peut alors en déduire facilement qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres (toujours pour X régulier)

$$\mathbf{K}_*(F)_{\mathbb{Q}} \simeq \prod_c CH([X^c/G], *) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)}),$$

où le produit est pris sur l'ensemble des sous-groupes cycliques de G et d'ordre premier à la caractéristique de k. Ceci répond à la question (3.6) de [V2].

Le corollaire 4.5 possède aussi une généralisation pour la K-théorie rationnelle. La formule que l'on obtient est une conséquence directe de 2.4.

Corollaire 4.6 *Soit $F = [X/G]$ le champ quotient d'une schéma en groupes affine et lisse sur un corps algébriquement clos, opérant sur un schéma régulier X. Notons $cycl(G)$ un ensemble de représentants de l'ensemble des classes de conjugaisons des sous-groupes cycliques de G d'ordre premier à la caractéristique de k. Pour $c \in cycl(G)$, notons aussi X^c le sous-schéma des points fixes, N_c son normalisateur, Z_c son centralisateur, et $W(c) = N_c/Z_c$ son groupe de Weyl. Pour $c \in cycl(G)$, soit $\zeta_{m(c)}$ une racine de l'unité d'ordre l'ordre de c. Alors il existe un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres*

$$\mathbf{K}_*([X/G])_{\mathbb{Q}} \simeq \prod_{c \in cycl(G)} (CH([X^c/Z_c], \bullet) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)}))^{W(c)}.$$

Preuve: Il faut tout d'abord remarquer que

$$C_F^t \simeq \coprod_{c \in cycl(G)} [X^c/N_c].$$

Ainsi, le théorème 2.4 donne un isomorphisme d'anneaux

$$\phi_F : \mathbf{K}_*([X/G])_{\mathbb{Q}} \simeq \prod_{c \in cycl(G)} \mathbb{H}^{-*}([X^c/N_c], \underline{\mathbf{K}} \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})).$$

Comme $W(c)$ est un groupe fini, la formule de Leray appliquée au morphisme $[X^c/N_c] \longrightarrow [X^c/Z_c]$, donne un isomorphisme naturel

$$\mathbb{H}^{-*}([X^c/N_c], \underline{\mathbf{K}} \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})) \simeq (\mathbb{H}^{-*}([X^c/Z_c], \underline{\mathbf{K}}_{\mathbb{Q}}) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)})))^{W(c)} \simeq (\underline{\mathbf{K}}_*([X^c/Z_c]) \otimes \mathbb{Q}(\zeta_{m(c)}))^{W(c)}.$$

On termine alors à l'aide de l'isomorphisme

$$Ch : \underline{\mathbf{K}}_*([X^c/Z_c]) \simeq CH([X^c/Z_c], *).$$

□

Supposons maintenant que G soit réductif, opérant sur un schéma X quelconque, toujours avec stabilisateurs réduits et finis. On ne suppose plus nécessairement que k est algébriquement clos.

La corollaire suivant répond à la conjecture (2.4) [V2]. Notons qu'elle été démontrée auparavant dans [E-G, Cor. 5.2], et pour une situation un peu plus générale (sans hypothèses sur G).

Corollaire 4.7 *Soit $f : [X/G] \longrightarrow BG$ le morphisme naturel. Soit $\tau : \mathbf{G}_0([X/G]) \longrightarrow CH([X/G], 0)$ la transformation de Riemann-Roch ([V2, 2.2]). Alors $x \in Ker\tau$ si et seulement s'il existe $y \in \mathbf{K}_0(BG)$ de rang non-nul, tel que $f^*(y).x = 0$.*

Preuve: Par la propriété du module (2.5 (5)), la condition est évidemment suffisante.

Par une descente galoisienne, on peut clairement supposer que k est algébriquement clos.

On commence par remarquer que le noyau de τ est aussi le noyau du morphisme canonique $\mathbf{G}_0([X/G]) \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_0([X/G])$. En effet, on peut vérifier que le morphisme τ se factorise par (car le caractère de Chern se factorise de cette façon)

$$\begin{tikzcd} \mathbf{G}_0([X/G]) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "can"'] & CH([X/G]) \\ \underline{\mathbf{G}}_0([X/G]) \arrow[ur, "\underline{\tau}"'] & \end{tikzcd}$$

On conclut alors en remarquant que $\underline{\tau}$ est un isomorphisme ([T2, 3.38]).

Par 4.1, on voit donc que $x \in \underline{\mathbf{G}}_0^{\chi\neq 1}([X/G])$. En utilisant la propiété du module (2.5 (5)), on voit qu'il suffit de trouver un élément $y \in \mathbf{K}_0(BG)$, tel que $\phi_F(f^*y) \in \underline{\mathbf{K}}_0([X/G]) \hookrightarrow \underline{\mathbf{K}}_0^{\chi}([X/G])$. En analysant la construction de $\phi_{[X/G]}$, il est facile de vérifier qu'il est suffisant de trouver $y \in \mathbf{K}_0(BG)$ de rang non-nul, tel que son caractère

$$\chi(y) : G \longrightarrow k$$

soit nul sur tout élément non trivial de G qui fixe au moins un point de X, et dont l'ordre est premier à la caractéristique.

Soit S l'ensemble des tels élément. Alors G opère sur S par conjugaison, et l'ensemble quotient est un ensemble fini. Choisissons un système de repésentant S' dans G. Si l'on construit pour tout $h \in S'$, un élément $y_h \in \mathbf{K}_0(BG)$ de rang non-nul, et dont le caractère s'annule en h, l'élément $y = \prod_{h\in S'} h_y$ répondra à la question.

Soit $h \in S'$. Comme h est d'ordre fini premier à $car k$, il est semi-simple, et est donc contenu dans un tore maximal $h \in \mathbb{T}$. Le morphisme induit sur les groupes des caractèrs $\mathcal{X}(\mathbb{T}) \longrightarrow \mathcal{X}(< h >)$ est surjectif. Il existe donc $z \in \mathbf{K}_0(B\mathbb{T})$, de rang 1, et dont la restriction à $< h >$ est une représentation fidèle. On considère $1 + z + \cdots + z^{m-1}$, où m est l'ordre de h. C'est un élément de rang non-nul de $\mathbf{K}_0(B\mathbb{T})$, dont le caractère s'annule en h. Notons le encore z. Notons W le groupe de Weyl de $\mathbb{T}$. Alors, en remplaçant z par $\sum_{\sigma \in W} \sigma(z)$, on peut supposer que z est invariant par le groupe de Weyl. Il provient donc d'un $y_h \in \mathbf{K}_0(BG)_{\mathbb{Q}}$, dont un multiple est l'élément cherché. $\Box$

Lorsque F n'est plus un quotient, on peut toujours se poser la question de la validité des corollaires 4.1, 4.4 et 4.7. Les deux premier se généralisent sans aucuns problèmes. Pour ce qui est de 4.7, on peut répondre tout au moins dans le cas régulier.

Corollaire 4.8 *Soit F un champ algébrique régulier (plus nécessairement sur un corps). Notons $can : \mathbf{G}_*(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \underline{\mathbf{G}}_*(F)$ le morphisme naturel. Alors, $x \in Ker(can)$ si et seulement s'il existe $y \in \mathbf{K}_0(F)$ de rang non-nul, tel que $y.x = 0$.*

Preuve: De nouveau la propriété du module implique que la condition est suffisante.

Par 2.4 le noyau de *can* est $\underline{\mathbf{G}}_*^{\chi \neq 1}(F)$, et par 2.5 il nous suffit donc de prendre l'image inverse par ϕ_F de n'importe quel élément de rang non nul dans $\underline{\mathbf{K}}_0(F) \hookrightarrow \underline{\mathbf{G}}_0^{\chi}(F)$. $\Box$

Remarque: On peut aussi démontrer le corollaire 4.8 de façon tout à fait élémentaire en utilisant le même arguement que celui utilisé pour la preuve de [V2, Thm. 3.1]. Cependant, le démonstration que l'on en donne permet de voir qu'il suffit de savoir répondre à la questions suivante.

Soit F un champ algébrique. Existe-t-il un élément $x \in \mathbf{K}_0(F)$ tel que $\phi_F(x) \in \underline{\mathbf{K}}_0(F) \hookrightarrow \underline{\mathbf{K}}_0^{\chi}(F)$, avec $\phi_F(x) \in \underline{\mathbf{K}}_0(F)$ de rang non-nul (par exemple $\phi_F(x) = 1$) ?

Notons que pour y répondre il faudra certainement savoir répondre à la question suivante. C'est une généralisation de la propriété de descente de la K-théorie rationnelle démontrée par Thomason dans [Th, Thm. 11.10].

Question: Soit $p : F \longrightarrow M$ la projection d'un champ algébrique sur son espace de modules. Le morphisme naturel

$$\mathbf{K}_*(F)_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{H}^{-*}(M_{et}, p_*\mathbf{K}_{\mathbb{Q}})$$

est-il un isomorphisme ?

Il me semble que déjà le cas où F est un espace algébrique n'est pas clair.

Remarque: Lorsque $S = Speck$, avec k un corps de caractéristique nulle, il existe une question analogue pour la cohomologie périodique des champs algébrique (voir la remarque qui suit [T2, Prop. 3.54]).

Il me semble que la description des anneaux $\mathbf{K}_*([X/H])_{\mathbf{Q}}$, où H est un groupe fini opérant sur un schéma X, est aussi liée à ces questions, et c'est sans doute le premier problème auquel il est important d'apporter une réponse.

4.2 Nouvelles γ-filtrations et formalisme de Riemann-Roch

Soit F un champ algébrique, et μ le faisceau sur C_F^t des racines de l'unité d'ordre correspondant au sous-groupe cyclique. En clair, si $U \longrightarrow C_F^t$ est un morphisme étale, correspondant à un objet $s \in F(U)$ et c un sous-groupe cyclique de $\underline{Aut}_U(s)$, $\mu(U) := \mu_{m(c)}(U)$, où $m(c)$ est l'ordre de c. Comme $m(c)$ est inversible sur U, μ est un schéma en groupes étale et fini sur C_F^t. C'est même un schéma en groupes cyclique de type multiplicatifs. Notons $\mathbb{Q}[\mu]$ le faisceau en $\mathbb{Q}$-algèbres de groupes, et $\mathbb{Q}[\mu] \longrightarrow \Gamma$ le quotient correspondant localement au morphisme naturel $\mathbb{Q}[\mathbb{Z}/m] \longrightarrow \mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Notons $q : I_F^t \longrightarrow C_F^t$ le morphisme naturel. Alors on peut vérifier qu'il existe un isomorphisme de faisceaux en $\mathbb{Q}$-algèbres

$$\Lambda \otimes \Gamma \simeq q_* q^*(\Gamma).$$

Ceci implique qu'il existe un isomorphisme

$$\mathbb{H}((C_F^t)_{et}, \underline{\mathbf{K}}_{\Lambda\otimes\Gamma}) \simeq \mathbb{H}((I_F^t)_{et}, \underline{\mathbf{K}}_{q^*\Gamma}).$$

Soit $S' \longrightarrow S$ un revêtement galoisien ramifié de groupe H, tel que le faisceau μ soit constant sur $C_F^t \times_S S'$. On peut prendre par exemple $S' = \mu_m$, où m est un multiple de tous les ordres des groupes d'isotropie de F. Sur une composante connexe de C_F^t sur laquelle le groupe cyclique universel est d'ordre m, le faisceau Γ devient alors isomorphe au faisceau constant $\mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Ceci implique qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres

$$\mathbb{H}^{-*}(C_F^t \times_S S', \underline{\mathbf{K}}_{\Lambda\otimes\Gamma}) \simeq \underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t \times_S S') \otimes \Gamma.$$

De plus cet isomorphisme est équivariant pour l'action de H sur S' et Γ. En fin de compte on trouve un morphisme naturel de $\mathbb{Q}$-algèbres

$$\mathbf{K}_*(F) \xrightarrow{\phi_F} \underline{\mathbf{K}}_*^{\chi}(F) \longrightarrow \underline{\mathbf{K}}_*^{\chi}(F \times_S S')^H \longrightarrow \mathbb{H}^{-*}(C_F^t \times_S S', \underline{\mathbf{K}}_{\Lambda\otimes\Gamma})^H \longrightarrow (\underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t \times_S S') \otimes \Gamma)^H$$

En utilisant [G-S, Thm. 3], $\underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t \times_S S')$ est un λ-anneau, et on peut trouver un isomorphisme d'anneaux (car $*$ est $\underline{\mathbf{K}}_{\mathbb{Q}}$-cohérent sur F_{et}, [G-S, Prop. 8])

$$\underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t \times_S S') \simeq Gr_\gamma^{\cdot} \underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t \times_S S').$$

Cet isomorphisme étant fonctoriel, il est H-équivariant, et permet donc de trouver un isomorphisme naturel de $\mathbb{Q}$-algèbres

$$(\underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t \times_S S') \otimes \Gamma)^H \simeq (Gr_\gamma^{\cdot} \underline{\mathbf{K}}_*(I_F^t \times_S S') \otimes \Gamma)^H.$$

Remarquons que l'action de H sur le second membre est compatible avec la graduation.

Définition 4.9 *Pour tout champ algébrique F, nous noterons*

$$H^p_\chi(F,j) := (Gr^j_\gamma \underline{\mathbf{K}}_{2j-p}(I^t_F \times_S S') \otimes \Gamma)^H.$$

La $\mathbb{Q}$-algèbre $\bigoplus_{p,j} H^p_\chi(F,j)$ sera appelée l'algèbre de cohomologie motivique de F à coefficients dans les caractères.

Notons que par construction, il existe un morphisme d'anneaux

$$Ch^\chi : \mathbf{K}_*(F) \longrightarrow H^*_\chi(F,\bullet).$$

Supposons maintenant que F soit quasi-projectif. Notons MI^t_F l'espace de modules de I^t_F. Alors, par les mêmes arguments que ci-dessus, ainsi que par 2.4, on peut trouver un isomorphisme fonctoriel pour les images directes

$$\mathbf{G}_*(F) \longrightarrow (Gr^\gamma_\cdot \mathbf{G}_*(MI^t_F \times_S S') \otimes \Gamma)^H,$$

où $Gr^\gamma_\cdot$ est la γ-filtration définie dans [So] (qui existe car MI^t_F est quasi-projectif par hypothèse).

Définition 4.10 *Pour tout champ algébrique quasi-projectif F, nous noterons*

$$H^\chi_p(F,j) := (Gr^\gamma_j \mathbf{G}_{p-2j}(MI^t_F) \otimes \Gamma)^H.$$

Le groupe $\bigoplus_{p,j} H^\chi_p(F,j)$ sera appelé le groupe d'homologie motivique de F à coefficients dans les représentations.

Aussi par construction, il existe un morphisme covariant pour les images directes de morphismes propres et représentables (ou de morphismes propres de dimension cohomologique fini quelconque si F est lisse)

$$\tau^\chi_F : \mathbf{G}_*(F) \longrightarrow H^\chi_*(F,\bullet).$$

Ces deux morphismes

$$Ch^\chi : \mathbf{K}_*(F) \longrightarrow H^*_\chi(F,\bullet)$$

$$\tau^\chi_F : \mathbf{G}_*(F) \longrightarrow H^\chi_*(F,\bullet)$$

définissent par images réciproques des filtrations sur les groupes $\mathbf{K}_m(F)$ et $\mathbf{G}_m(F)$. Le lecteur se convaincra (en considérant l'exemple de $F = [X/H]$ par exemple) que ces filtrations ne sont pas équivalentes (même rationnellement) aux γ-filtrations 'usuelles' (i.e. provenant des puissances extérieures de fibrés sur F). De même, la filtration induite sur $\mathbf{G}_0(F)$ n'est pas équivalente à la filtration par la dimension du support. La raison en est que C^t_F n'est pas équidimensionel en général.

Bien entendu la construction que nous donnons de ces filtrations n'est pas satisfaisante, dans le sens où il devrait exister un moyen de le définir plus directement sur les groupes de K-théorie, sans passer par les morphismes ϕ et ψ.

Question: Existe-t-il des descriptions de ces filtrations intrensèques à F ?

Supposons maintenant que F soit lisse sur S. On a déjà vu qu'il existe alors un élément inversible $\alpha_F \in \underline{\mathbf{K}}_0^{\chi}(F)$. L'image de α_F par le morphisme naturel

$$\underline{\mathbf{K}}_0(F) \longrightarrow H^*_{\chi}(F, 2*)$$

sera notée $Ch(\alpha_F)$. Comme α_F est un élément inversible, $Ch(\alpha_F)$ aussi.

Le champ C^t_F étant encore lisse sur S, il possède un fibré tangent T, qui possède un classe dans $\underline{\mathbf{K}}_0(C^t_F)$. Comme $\underline{\mathbf{K}}_0(C^t_F)$ est un λ-anneau, on dispose de l'application 'classe de Todd'

$$Td : \underline{\mathbf{K}}_0(C^t_F) \longrightarrow Gr^*_{\gamma}\underline{\mathbf{K}}_0(C^t_F).$$

L'image de $Td(T)$ par le morphisme naturel $Gr^*_{\gamma}\underline{\mathbf{K}}_0(C^t_F) \longrightarrow H^*_{\gamma}(F, 2*)$ sera notée $Td(C^t_F)$.

Définition 4.11 *Si F est un champ algébrique lisse, alors sa classe de Todd est définie par*

$$Td^{\chi}(F) := Ch(\alpha_F)^{-1}.Td(C^t_F) \in H^*_{\chi}(F, 2*).$$

En utilisant alors les techniques de démonstration du théorème 2.5, on peut espérer démontrer un théorème de Riemann-Roch à valeurs dans cette cohomologie motivique. Comme nous n'avons pas vérifié les détails, nous laisserons cette question ouverte.

Problèmes:

1. Montrer que $F \mapsto (H^*_{\chi}(F, \bullet), H^{\chi}_*(F, \bullet))$ forme une 'bonne' (cf ci-dessous) théorie cohomologique.

2. Montrer alors que les théorèmes [T1, 4.11] et [T2, 3.33] se généralisent au cas des champs algébriques quasi-projectifs sur S.

Remarque: Dans le premier problème, il me semble peu raisonable d'attendre que la théorie satisfasse à tous les axiomes de [So]. Ceci est du essentiellement au fait que la théorie n'existe pas à coefficients dans $\mathbb{Q}$, mais uniquement après l'extension des scalaires à Γ. Ainsi, il me semble difficile de possèder d'une bonne théorie des classes de Chern. Ceci est aussi à raprocher du fait que lorsque F est connexe, C^t_F ne l'est pas, et donc on perd la notion même de rang.

5 Cas des champs d'Artin

La plupart des constructions que nous avons données dans les paragraphes précédents gardent en réalité un sens lorsque l'on remplace les champs de Deligne-Mumford par des champs d'Artin. Ainsi, pour tout champ d'Artin (de type fini sur S), on dispose du champ C^t_F classifiant les paires (s, c), où s est un objet de F au-dessus d'un schéma X, et c est un sous-groupe cyclique de type multiplicatif de l'espace algébrique en groupes $\underline{Aut}_X(s)$. En mettant de coté les cas pathologiques, C_F^t est cetainement encore un champ d'Artin, localement de type fini sur S. Sur C_F^t on dispose toujours du champ en groupes universel, et de son faisceau des caractères $\mathcal{X}$. On peut donc donner un sens à Λ. Le lecteur vérifiera sans problèmes que la construction donnée dans le présent travail se généralise, et donne un morphisme

$$\phi_F : \mathbf{K}(F) \longrightarrow \mathbb{H}(C_F^t, \underline{\mathbf{K}}_\Lambda).$$

Le simple exemple du champ classifiant d'un groupe algébrique montre que 2.4 (1) n'a aucune chance de rester vrai sans hypothèses supplémentaires. Il semble par exemple raisonnable de commencer par se restreindre au cas des champs dont la diagonale est un morphisme fini. Le résultat démontré dans [V-V] montre qu'il est alors très probable que 2.4 (1) reste vrai, mais je ne sais pas le démontrer.

Je ne vois pas comment généraliser la construction de ψ_F.

En ce qui concerne le théorème 2.5, ou encore une éventuelle formule de Riemann-Roch, on peut raisonnablement attendre à ce qu'il soit vrai pour un morphisme propre de dimension cohomologique fini entre deux champs dont les diagonales sont affines. En effet, dans ce cas on se trouve avec une famille de champs dont la diagonale est finie, parametrée par un champ d'Artin. Pour les morphismes fortement projectif, les techniques standards donnent une formule de Riemann-Roch ([T2, 3.23]).

Références

[B] S. Bloch, "Higher algebraic K-theory and algebraic cycles", Adv. in Math. **61** (1985), pp. 267 – 304.

[B-K] "Homotopy limits, completions and localisations", Lecture Notes in Math. **304**, Springer (1972).

[D] P. Deligne, "Théorie de Hodge II", Publ. Math. I.H.E.S. **40** (1971), pp. 5 – 57.

[E] D. Edidin, "On quotient stacks", preprint *math.AG*/9905049.

[E-G] D. Edidin and W. Graham, "Riemann-Roch for equivariants Chow groups", preprint *math.AG*/9905081.

[G] H. Gillet, "Homological descent for the K-theory of coherent sheaves", in Algebraic K-theory, number theory, geometry and analysis, Lecture Notes in Math. **1046**, Springer-Verlag (1982), pp. 80 – 103.

[G-S] H. Gillet et C. Soulé, "Filtrations on higher algebraic K-theory", preprint du serveur de K-théorie 327.

[Ja] J. F. Jardine, "Generalized etale cohomology theories", Progr. Math. **146**, Birkhauser, Basel, 1997.

[Jo] R. Joshua, "Higher intersection theory an algebraic stacks I, II", preprint du serveur de K-théorie $373-374$.

[L-M] G. Laumon et L. Moret-Bailly, "Champs algébriques", Prépublication d'Orsay (1992).

[SGA 3] "Schémas en groupes II: Groupes de type multiplicatif et structure des schémas en groupes généraux", Lecture Notes in Math. **152**, Springer-Verlag (1970).

[SGA 4] "Théorie des topos et cohomologie étale des schémas", Lecture Notes in Math. **270**, Springer-Verlag 1972.

[So] C. Soulé, "Opérations en K-théorie algébrique", Canad. Journal of Math. **37**, 1985, pp. $488-550$.

[Th] R. W. Thomason, "Algebraic K-theory of schemes and derived categories", dans *Grothendieck Festschrift*, Vol. III, Birkhauser, Basel, 1990, pp. $247-436$.

[Th2] R. W. Thomason, "Lefschetz-Riemann-Roch theorem and coherent trace formula", Invent. Math. Vol. **85** Fasc. 3 (1986), pp. $515-545$.

[T1] B. Toen, "Théorèmes de Riemann-Roch pour les champs de Deligne-Mumford", K-theory, vol. **18**, (1999), pp. $33-76$.

[T2] B. Toen, "K-théorie et cohomologie des champs algébriques: Théorèmes de Riemann-Roch, $\mathcal{D}$-modules et théorèmes GAGA", thèse de l'université Paul Sabatier Toulouse 3, 1999, preprint *math.AG*/9908097.

[V1] A. Vistoli, "Higher K-theory of finite group schemes actions", Duke Math. Journal No. **63** (1991) pp. $399-419$.

[V2] A. Vistoli, "Equivariant Grothendieck groups and equivariant Chow groups", in Classification of irregular varieties, Trento 1990, Lecture Notes in Math. **1515**, Springer-Verlag (1992).

[V-V] A. Vistoli, G. Vezzosi, "Higher algebraic K-theory of group actions with finite stabilizers", preprint du serveur de K-théorie 377.