Théorèmes de Riemann-Roch pour les Champs de Deligne-Mumford

B. TOEN*

Résumé

On se propose de développer un cadre cohomologique pour les champs de Deligne-Mumford, adapté à des formules de type Hirzebruch-Riemann-Roch. On définit à cet effet la "cohomologie à coefficients dans les représentations", ainsi qu'un caractère de Chern, et on démontre un théorème de Grothendieck-Riemann-Roch pour la transformation de Riemann-Roch associée.

Mots clés: Champs de Deligne-Mumford, théorème de Riemann-Roch, théories cohomologiques.

*Laboratoire Emile Picard, Université Paul Sabatier 118, route de Narbonne 31062 Toulouse Cedex France. e-mail:toen@picard.ups-tlse.fr

Table des matières

1 Introduction

Lorsque l'on étudie les espaces de modules, il est peu fréquent de rencontrer des espaces de modules fins. Ceci entraine en particulier que certaines constructions naturelles (les objets universels par exemple) n'existent pas. Mais, si l'on se place dans le cadre plus général des champs algébriques, ces constructions deviennent possibles. Il reste alors à en étudier les propriétés. Pour cela, il semble naturel de chercher à savoir si les théorèmes classiques de la géométrie algébrique restent valables lorsque l'on passe des variétés aux champs. Nous nous proposons ici, d'analyser le cas du théorème de Grothendieck-Riemann-Roch.

Ennoncer un tel théorème nécessite une théorie cohomologique recevant un caractère de Chern, et nous verrons que la principale difficulté réside dans sa définition.

Sur ce sujet il existe actuellement de nombreuses définitions de groupes de Chow d'un champ algébrique ([Mu, E-G, G2, Vi2]). Pour toutes ces théories la projection naturelle d'un champ (au sens de Deligne et Mumford [D-M]) sur son espace de modules

$$p : F \longrightarrow M$$

vérifie $p_* : A(F)_{\mathbf{Q}} \simeq A(M)_{\mathbf{Q}}$. Nous verrons (voir la remarque suivant 4.2) que cette propriété interdit une formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch à valeurs dans $A(F)_{\mathbf{Q}}$.

Notre point de départ est donc de trouver une nouvelle définition de la cohomologie d'un champ. Pour cela, nous proposons d'étudier les spectres de G-théorie des champs algébriques, afin d'un déduire leurs comportements cohomologiques (leurs "motifs"). La définition s'imposera alors d'elle même. On retrouve ainsi une idée de Carlos Simpson, consitant à considérer des cycles dont les coefficients sont des représentations.

Le texte est découpé en trois parties et un appendice.

Dans le premier chapitre on rappelle quelques résultats et notations concernant la cohomologie des préfaisceaux en spectres, et les champs algébriques.

Le second chapitre est consacré à l'étude des spectres de K-théorie des catégories des faisceaux cohérents et localement libres sur un champ algébrique. On s'intéressera particulierement à deux problèmes.

Le premier concerne la descente de la G-théorie rationnelle. Nous démontrons à ce sujet trois résultats

- Le théorème de descente étale, qui permet de travailler localement sur les espaces de modules.
- Un résultat de descente homologique analogue à celui démontré dans [G3]. Il permet par exemple de définir des images directes en G-théorie étale, et

de montrer par exemple que la projection naturelle sur l'espace de modules

$$p : F \longrightarrow M$$

induit une équivalence faible

$$p_* : H(F_{et}, G \otimes \mathbf{Q}) \simeq G(M) \otimes \mathbf{Q}$$

- Enfin nous définissons une notion d'enveloppe de Chow rationnelle, qui permettra par la suite de nous ramener au cas de gerbes triviales.

Le second problème est la description des algèbres $G_*(F)$, lorsque F est lisse. Nous démontrerons un isomorphisme fonctoriel de $\mathbf{Q}(\mu_\infty)$-algèbres

$$G_*(F) \otimes \mathbf{Q}(\mu_\infty) \simeq H^{-*}((I_F)_{et}, G \otimes \mathbf{Q}(\mu_\infty))$$

où I_F est le champ des ramifications de F. Notons que cet isomorphisme est une généralisation de la description de la K-théorie équivariante donnée par A. Vistoli dans [Vi].

A la suite de cet isomorphisme, nous définirons dans le troisième chapitre, la cohomologie à coefficients dans les représentations par

$$H^\bullet_{rep}(F, *) := H^\bullet((I_F)_{et}, \Gamma(*))$$

où Γ est une théorie cohomologique au sens de Gillet [G]. On définit alors un caractère de Chern et une classe de Todd, qui vérifient la formule de Grothendieck-Riemann-Roch

$$Ch(f_*(x)).Td(F') = f_*(Ch(x).Td(F))$$

pour un morphisme propre $f : F \longrightarrow F'$ de champs algébriques lisses. Comme dans le cas des schémas, on diposera aussi d'une extension au cas des champs avec singularités.

Dans l'appendice on donne une preuve d'un théorème de descente pour la cohomologie à coefficients dans les préfaisceaux simpliciaux. C'est un résultat que nous utilisons implicitement tout au long du texte.

REMERCIEMENTS: Je remercie très sincèrement J. Tapia et C. Simpson, qui ont encadré ce travail, et qui m'ont accordé de nombreuses discussions ainsi que de précieux conseils.

Une importante partie du présent travail à été effectuée durant un séjour à l'institut Max Planck, que je tiens à remercier pour la qualité de son accueil.

2 Conventions et Notations

On notera Δ la catégorie simpliciale standart, et $SEns$ celle des ensembles simpliciaux. A l'aide de la construction $X \mapsto Sing(\mid X \mid)$, on supposera qu'ils sont tous fibrants.

De même Sp désigne la catégorie des spectres ([J, 1-1]), et on supposera que pour tout spectre E, toutes les composantes $E_{[n]}$ sont des ensembles simpliciaux fibrants.

2.1 Cohomologie Généralisée

2.1.1 Préfaisceaux Simpliciaux

Soit C un site. On désigne par $SPr(C)$ la catégorie des préfaisceaux sur C à valeurs dans $SEns$. D'après [J, $2-32$], c'est une catégorie de modèles fermée simpliciale. Les termes fibration, cofibration et équivalence faible feront référence à cette structure. Si F et G sont deux objets de $SPr(C)$, on notera $Hom_s(F,G)$ l'ensemble simplicial des morphismes de F vers G dans $SPr(C)$. Le préfaisceau simplicial constant est noté $*$.

On dira qu'un morphisme $F \to G$ est une résolution injective, si c'est une cofibration triviale, et si G est un préfaisceau simplicial fibrant. Tout préfaisceau simplicial admet une résolution injective, et elle est essentiellement unique. En général nous noterons $F \to HF$ une telle résolution. On note alors, $H(X,F) := HF(X)$, pour chaque $X \in C$, et $H(C,F) := Hom_s(*,F)$. Si de plus (F,x) est pointé, on pose $H^{-m}(C,F) := \pi_m(H(C,F),x)$. Nous dirons que F est un préfaisceau simplicial flasque, si pour chaque objet $X \in C$, le morphisme $F(X) \to HF(X)$ est une équivalence faible.

Soit $U \to X$ un morphisme couvrant dans C, le nerf de U sur X est l'objet simplicial de C défini par

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{N}(U/X): & \Delta^{op} & \to & C \\ & [p] & \mapsto & \underbrace{U \times_X U \times_X \cdots \times_X U}_{p+1\ fois} \end{array}$$

les faces et dégénéréscences étant données par les projections et les diagonales. Pour chaque morphisme couvrant $U \to X$, et F un préfaisceau simplicial, on dispose alors d'un Δ-diagramme

$$F(\mathcal{N}(U/X)) : [p] \mapsto F(U \times_X U \times_X \cdots \times_X U)$$

La cohomologie de Čech de F pour le recouvrement $U \to X$ est l'ensemble simplicial

$$\check{H}(U/X,F) := Holim_{\Delta} F(\mathcal{N}(U/X))$$

où $Holim$ est le foncteur de limite directe homotopique décrit dans [B-K, Chap. XI].

Nous dirons alors que F vérifie la propriété de Mayer-Vietoris, si pour chaque objet $X \in C$, et chaque recouvrement $U \to X$, le morphisme naturel $F(X) \to \check{H}(U/X, F)$ est une équivalence faible. Le théorème de descente cohomologique (voir l'appendice 5.11) nous dit qu'un préfaisceau fibrant vérifie cette propriété, et donc un préfaisceau flasque aussi.

2.1.2 Préfaisceaux en Spectres

On notera $SpSpr(C)$ la catégorie des préfaisceaux en spectres sur un site C. D'après [J, $2-34$], c'est une catégorie de modèles fermée. On dispose donc de notions de fibration, cofibration et équivalence faible. Si F et G sont deux préfaisceaux en spectres on note $Hom_{sp}(F,G)$ le spectre des morphismes de F vers G. Comme précédemment, les résolutions injectives seront notées $F \to HF$, et $H(X,F) := HF(X)$. Si F est un préfaisceau simplicial, on note SF son spectre de suspension. On définit $\Sigma := S*$. Si F est un préfaisceau en spectres, on pose $H(C,F) := Hom_{sp}(\Sigma, F)$, et $H^{-m}(C,F) := \pi_m(H(C,F))$. On dispose aussi de notions de cohomologie de Čech, de préfaisceaux en spectres flasques, et du théorème de descente.

Soit $f : F \to G$ un morphisme de préfaisceaux en spectres. La fibre homotopique de f est définie par

$$Fib(f)_{[n]} := Holim \left(\begin{tikzcd} F_{[n]} \arrow[r, "f"] & G_{[n]} \\ & * \arrow[u] \end{tikzcd} \right)$$

La cofibre homotopique est

$$Cof(f)_{[n]} := Hocolim \left(\begin{tikzcd} F_{[n]} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G_{[n]} \\ * & \end{tikzcd} \right)$$

Une suite exacte est la donnée de morphismes de préfaisceaux en spectres

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

et d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"'] & F \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id"'] & G \arrow[d, "id"'] \\
Fib(g) \arrow[r, "j"] & F \arrow[r, "g"] & G
\end{tikzcd}$$

où j est le morphisme naturel, et u une équivalence faible. D'après [J, $4-1$, $4-4$], c'est aussi équivalent à la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \arrow[r, "g"] & G \\
E \arrow[r, "f"] \arrow[u, "id"] & F \arrow[r, "p"] \arrow[u, "id"] & Cof(f) \arrow[u, "v"]
\end{tikzcd}$$

avec p le morphisme naturel et v une équivalence faible.

Un morphisme de suites exactes est un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d] & F \arrow[r, "g"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\
E' \arrow[r, "f'"] & F' \arrow[r, "g'"] & G'
\end{tikzcd}$$

compatible avec les diagrammes ci-dessus.

Toute suite exacte

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

donne une suite exacte longue de cohomologie

$$H^{-m}(C,F) \xrightarrow{g_*} H^{-m}(C,G) \xrightarrow{\delta} H^{-m+1}(C,E) \xrightarrow{f_*} H^{-m+1}(C,F)$$

Un morphisme de suites exactes induit un morphisme de suites exactes longues. Remarquons enfin que le foncteur $Holim$ (resp. $Hocolim$) commute avec la formation des fibres homotopiques (resp. cofibres homotopiques), et transforment donc de façon naturelle les suites exactes en suites exactes.

2.2 Champs Algébriques

Les références pour ce paragraphe sont [D-M, L-M].

Soit $p : \mathcal{C} \to C$ une catégorie fibrée en groupoèdes sur un site C. On lui associe un préfaisceau en groupoèdes sur C défini par

$$\begin{array}{rccc} F_{\mathcal{C}} : & C & \to & Groupoides \\ & U & \mapsto & Hom_C(U, \mathcal{C}) \end{array}$$

avec U considéré comme catégorie fibrée représentée par U, et Hom_C le groupoède des morphismes de catégories fibrées sur C. En associant à chaque groupoède son classifiant, on obtient un préfaisceau simplicial $F_{\mathcal{C}}$ sur C. Avec ces notations, $\mathcal{C}$ est un champ si $F_{\mathcal{C}}$ est flasque comme préfaisceau simplicial.

De cette façon on a une équivalence de la 2-catégorie des champs sur C avec celle des préfaisceaux simpliciaux flasques 1-tronqués et morphismes flexibles ([S]).

Si $F \to H$ et $G \to H$ sont deux morphismes de champs, on note $F \times_H G$ le produit fibré homotopique. Si les morphismes vers H sont clairs, on notera aussi $F \times G$.

Soit $f : F \to G$ un morphisme de champ, et $U \to G$ un morphisme avec $U \in C$. La fibre de f au-dessus de U est notée $f^{-1}(U) := F \times_G U$. Rappelons que f est représentable si toutes les fibres $f^{-1}(U)$ sont représentables par des objets de C.

Supposons maintenant que $C = (Sch/k)_{et}$, le site des schémas séparés de type fini sur un corps k. Un schéma sera un objet de C. Un champ F sera algébrique si d'une part le morphisme diagonal

$$\Delta : F \to F \times F$$

est représentable et fini, et de plus s'il existe un schéma X et un morphisme étale et surjectif $X \to F$. Le champ des ramifications d'un champ algébrique F est

$$I_F := F \times_{F \times F} F$$

Il est muni d'un morphisme $\pi : I_F \to F$ qui est (représentable) fini et non-ramifié. On dira que F est une gerbe si π est étale.

Soit X une variété et H un groupe fini opérant sur X. Le champ quotient de X par H est noté $[X/H]$. Ses sections au-dessus d'un schéma Y sont les H-torseurs P sur Y munis de morphismes H-équivariants vers X. Si $F = [X/H]$, alors on a une équivalence canonique $I_F \simeq [\hat{X}/H]$, avec $\hat{X} = \{(x,h) \in X \times H/h.x = x\}$. Et donc

$$I_F \simeq \coprod_{h \in c(H)} [X^h/Z_h]$$

avec $c(H)$ les classes de conjugaisons de H, et Z_h le centralisateur de h dans H.

Un espace de modules pour F, est un espace algébrique M muni d'un morphisme propre $p : F \to M$ qui est universel vers les espaces algébriques, et tel que $p : \pi_0 F(SpecK) \simeq M(SpecK)$ soit une bijection pour tout corps algébriquement clos K. D'après [K-M], tout champ algébrique possède un espace de modules. De plus, il existe un recouvrement étale $U \to M$, un schéma V, un faisceau constant de groupes finis H opérant sur V, et une équivalence $F_U := p^{-1}(U) \simeq [V/H]$. Le champ F est une gerbe si et seulement si on peut prendre H qui opère trivialement (on dit alors que " H

est le groupe de la gerbe F "). En particulier, si F est réduit, il existe un sous-champ ouvert dense qui est une gerbe. Les sous-champs ouverts (resp. fermés réduits) de F sont tous de la forme $F' := F \times_M M' \hookrightarrow F$ (resp. $F' := (F \times_M M')_{red} \hookrightarrow F$), avec $M' \hookrightarrow M$ une immersion ouverte (resp. fermée). On notera $Codim(F', F) := Codim(M', M)$. On appellera point de F un point de M. La gerbe résiduelle d'un point $Speck(x) \to M$, est la gerbe sur $Speck(x)$, $\widetilde{x} = (F \times_M Speck(x))_{red}$. L'ordre d'inertie de F en x est l'ordre du groupe de la gerbe résiduelle $\widetilde{x}$.

Soit $M' \to M$ est un morphisme d'espaces algébriques, M l'espace de modules de F, et $F' = F \times_M M'$. Alors le morphisme naturel de l'espace de modules M'' de F'

$$M'' \to M'$$

est radiciel ([Vi, 2.1]). Comme nous nous interresserons aux types d'homologie rationnelle, on pourra indentifier M'' et M' par ce morphisme.

Le site étale d'un champ algébrique F sera noté F_{et} ([D-M, 4.10]). Il est muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_F$. La catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_F$-modules cohérents sera notée $Coh(F)$, et celle des faisceaux de $\mathcal{O}_F$-modules localement libres de rang fini (fibrés vectoriels) $Vect(F)$.

Un morphisme de champs $f : F \longrightarrow F'$ est projectif s'il existe une factorisation de f

$$F \xrightarrow{j} \mathbf{P}(V) \xrightarrow{p} F'$$

où j est une immersion fermée, et p la projection d'un fibré projectif associé à un fibré vectoriel V sur F'.

3 G-théorie des Champs de Deligne-Mumford

Dans cette section k est un corps, et on suppose que k contient les racines de l'unité. Les champs algébriques sont des champs algébriques sur $(Sch/k)_{et}$.

Si F est un champ algébrique, on dispose des catégories $Coh(F)$ et $Vect(F)$. Ce sont des catégories exactes au sens de Quillen ([Q, 2]). On peut donc leur associer les spectres de K-théorie.

Définition 3.1 *Les spectres de K-théorie et de G-théorie d'un champ algébrique F sont définis par*

$$K(F) := K(Vect(F))$$

$$G(F) := K(Coh(F))$$

On pose alors

$$K_m(F) := \pi_m(K(F))$$

$$G_m(F) := \pi_m(G(F))$$

La correspondance $F \mapsto K(F)$ (resp. $F \mapsto G(F)$) est un foncteur de la 2-catégorie des champs (resp. champs et morphismes plats), vers celles des spectres, morphismes de spectres et homotopies entre morphismes. Le produit tensoriel définit une structure de $K(F)$-module sur $G(F)$. Par restriction, on obtient deux préfaisceaux en spectres K et G sur F_{et}.

Définition 3.2 *Les spectres de K-théorie et de G-théorie étale sont définis par*

$$K_{et}(F) := H(F_{et}, K)$$

$$G_{et}(F) := H(F_{et}, G)$$

On pose alors

$$K_{m,et}(F) := \pi_m(K_{et}(F))$$

$$G_{m,et}(F) := \pi_m(G_{et}(F))$$

Soit $p : F \to F'$ un morphisme propre de dimension cohomologique finie. En utilisant les arguments de [Th, 3.16.1], on peut construire un morphisme d'images directes

$$p_* : G(F) \to G(F')$$

qui est strictement fonctoriel pour la composition.

De la même façon, on dipose d'images réciproques

$$f^* : G(F') \to G(F)$$

pour les morphismes $f : F \to F'$ de Tor-dimension finie.

On a également que $G_{et}(F)$ est fonctoriel covariant pour les images directes de morphismes propres représentables, et contravariant pour les morphismes de Tor-dimension finie. La covariance pour les morphismes propres non nécessairement représentables sera étudiée plus loin. Ces images directes et réciproques sont liées par les formules habituelles de transfert et de projection ([Q, 7 2.11, 2.10]).

3.1 Propriétés générales

La proposition suivante montre que les propriétés générales de la G-théorie des champs sont les mêmes que celles des schémas.

Proposition 3.3 1. *(invariance topologique) Soit F un champ algébrique, et $j : F_{red} \hookrightarrow F$ l'immersion canonique de son sous-champ réduit, alors*

$$j_* : G(F_{red}) \to G(F)$$

est une équivalence faible.

2. *(localisation) Si $j : F' \hookrightarrow F$ est un sous-champ fermé de complémentaire $i : F - F' \hookrightarrow F$, alors il existe une suite exacte fonctorielle*

$$G(F') \xrightarrow{j_*} G(F) \xrightarrow{i^*} G(F - F')$$

3. *(axiome du fibré projectif) Si $p : V \to F$ est un fibré vectoriel de rang $r+1$, $\pi : P \to F$ le fibré projectif associé, et $x := \mathcal{O}_P(1) \in K(P)$ le fibré inversible canonique, alors le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{i=0}^{i=r} G(F) & \to & G(P) \\ \vee(a_i) & \mapsto & \sum_{i=0}^{i=r} \pi^*(a_i).x^i \end{array}$$

est une équivalence faible.

4. *(homotopie) Soit $p : V \to F$ un fibré vectoriel. Alors le morphisme*

$$p^* : G(F) \to G(V)$$

est une équivalence faible.

<u>**Preuve:**</u> Les preuves sont les mêmes que pour le cas des schémas. $\Box$

En localisant, on dispose de la même proposition pour le cas étale.

Proposition 3.4 1. *(invariance topologique) Soit F un champ algébrique, et $j : F_{red} \hookrightarrow F$ l'immersion canonique de son sous-champ réduit, alors*

$$j_* : G_{et}(F_{red}) \to G_{et}(F)$$

est une équivalence faible.

2. *(localisation) Si $j : F' \hookrightarrow F$ est un sous-champ fermé de complémentaire $i : F - F' \hookrightarrow F$, alors il existe une suite exacte fonctorielle*

$$G_{et}(F') \xrightarrow{j_*} G_{et}(F) \xrightarrow{i^*} G_{et}(F - F')$$

3. *(axiome du fibré projectif) Si $p : V \to F$ est un fibré vectoriel de rang $r+1$, $\pi : P \to F$ le fibré projectif associé, et $x := \mathcal{O}_P(1) \in K_{et}(P)$ le fibré inversible canonique, alors le morphisme*

$$\begin{array}{ccc} \bigvee_{i=0}^{i=r} G_{et}(F) & \to & G_{et}(P) \\ \vee(a_i) & \mapsto & \sum_{i=0}^{i=r} \pi^*(a_i).x^i \end{array}$$

est une équivalence faible.

4. *(homotopie) Soit $p : V \to F$ un fibré vectoriel. Alors le morphisme*

$$p^* : G_{et}(F) \to G_{et}(V)$$

est une équivalence faible.

Pour finir ces généralités, rappelons le dévissage suivant la codimension du support [G2, 7.7].

Proposition 3.5 *Soit F un champ algébrique et $Coh(F)^p$, la catégorie des faisceaux cohérents sur F dont le support est de codimension supérieur ou égal à p. Notons $F^{(p)}$ l'ensemble des points de codimension p dans F, et $G(F)^p := K(Coh(F)^p)$. Alors les morphismes naturels définissent une suite exacte*

$$G(F)^{p+1} \longrightarrow G(F)^p \longrightarrow \bigvee_{x\in F^{(p)}} G(\widetilde{x})$$

3.2 Théorèmes de Descente

Nous venons de voir que la G-théorie des champs algébriques possèdait beaucoup de propriétés analogues au cas des schémas. Cependant le théorème de descente étale de la G-théorie rationnelle s'avère faux en général. Nous allons voir qu'une généralisation plus faible existe tout de même. Elle nous permettra de nous ramener souvent au cas des champs quotients par des groupes finis. Nous démontrerons par la suite un théorème de descente homologique. Ce résultat nous permettra de définir les images directes pour la G-théorie étale.

Nous adopterons la notation suivante : si E est un préfaisceau en spectres on notera $E_{\mathbf{Q}} := E \otimes \mathbf{Q}$. C'est le préfaisceau localisé de E suivant les équivalences faibles rationnelles.

3.2.1 Descente Etale

Théorème 3.6 *Soit $p : F \to M$ la projection d'un champ algébrique sur son espace de modules. Alors $p_*G_{\mathbf{Q}}$ est flasque sur M_{et}.*

Remarquons que si F est un schéma, le théorème redonne le théorème de descente étale de la G-théorie rationnelle ([Th, 11.10]).

Preuve: En utilisant le "lemme des cinq", on sait que s'il existe une suite exacte

$$E \longrightarrow F \longrightarrow G$$

sur M_{et}, F est flasque si G et E le sont.

Utilisons alors la proposition 3.5. On dispose d'une suite exacte sur M_{et}

$$p_*G_{\mathbf{Q}}^{p+1} \longrightarrow p_*G_{\mathbf{Q}}^{p} \longrightarrow \bigvee_{x\in F^{(p)}} (i_x)_*(p_x)_*G_{\mathbf{Q}}$$

où $i_x : Speck(x) \to M$ est le morphisme associé au point x, et $p_x : \widetilde{x} \to Speck(x)$ la projection naturelle. En raisonnant par récurrence descendante sur p, il nous suffit de montrer que le terme de droite est flasque sur M_{et}, et donc que pour chaque point x de M, le préfaisceau $(i_x)_*(p_x)_*G_{\mathbf{Q}}$ est flasque sur M. Comme les images directes préservent les préfaisceaux flasques, il suffit de montrer que $(p_x)_*G_{\mathbf{Q}}$ est fasque sur $(Speck(x))_{et}$. Ainsi on se ramène à démontrer le théorème dans le cas où $M = SpecK$ est le spectre d'un corps. Comme M_{et} est alors le site galoisien de K, le théorème provient du lemme suivant.

Lemme 3.7 *Soit $F \to SpecK$ une gerbe sur un corps K, K^{sp} une clôture séparable de K, et $H = Gal(K^{sp}/K)$. On note $F^{sp} \to SpecK^{sp}$ la gerbe induite. Alors le morphisme canonique $q : F^{sp} \to F$, induit une équivalence faible*

$$q^* : G_{\mathbf{Q}}(F) \to G_{\mathbf{Q}}(F^{sp})^H$$

Preuve: On commence par éclaircir les notations. Le groupe H opère par automorphismes sur $SpecK^{sp}$, et par fonctorialité, on a une opération $H \to Aut_F(F^{sp})$. Donc H opère sur l'espace $G(F^{sp})_{\mathbf{Q}}$, que l'on voit alors comme un H-diagramme. Dans ce cas

$$G(F^{sp})^H_{\mathbf{Q}} := Holim_H G(F^{sp})_{\mathbf{Q}}$$

est l'espace des invariants homotopiques de H.

Comme H est profini, et que $G(F^{sp})_{\mathbf{Q}}$ est un spectre rationnel, la suite spectrale de Bousfield-Kan ([B-K, Ch. XI §7]) dégénère et donne des isomorphismes canoniques $\pi_m(G(F^{sp})^H_{\mathbf{Q}}) \simeq G_m(F^{sp})^H_{\mathbf{Q}}$. De plus par continuité du foncteur G, on a

$$G_m(F^{sp})^H_{\mathbf{Q}} \simeq Colim_{K \hookrightarrow K_i \; galois \; fini} G_m(F_i)^{H_i}_{\mathbf{Q}}$$

avec $H_i = Gal(K_i/K)$, et $F_i = F \times_{SpecK} SpecK_i$. Il reste à montrer que le morphisme naturel $G(F)_{\mathbf{Q}} \to G(F_i)^{H_i}_{\mathbf{Q}}$ est une équivalence faible pour tout i.

Soit $p : F_i \to F$ la projection, et m_i l'ordre de H_i. Alors la formule de projection implique que

$$p_* \circ p^* = \times m_i : G(F)_{\mathbf{Q}} \to G(F)_{\mathbf{Q}}$$

Et de même

$$p^* \circ p_* = \sum_{h \in H_i} h^* \sim \times m_i : G(F_i)^{H_i}_{\mathbf{Q}} \to G(F_i)^{H_i}_{\mathbf{Q}}$$

Ainsi, $\frac{1}{m_i} p_*$ est un inverse homotopique de p^*. $\Box$

Corollaire 3.8 *Soit F un champ algébrique, et $p : F \to M$ son espace de modules.*

1. *Pour tout recouvrement étale $U \to M$, le morphisme naturel*

$$G(F)_{\mathbf{Q}} \to \check{H}(U/M, p_* G_{\mathbf{Q}})$$

est une équivalence faible.

2. *Soit $X \to M$ un revêtement galoisien de groupe H, et $p : F_X := F \times_M X \to F$ le revêtement induit. Alors les morphismes naturels*

$$p^* : G(F)_{\mathbf{Q}} \to G(F_X)^H_{\mathbf{Q}}$$

$$p_* : G(F_X)^H_{\mathbf{Q}} \to G(F)_{\mathbf{Q}}$$

sont des équivalences faibles.

3. *Si F est lisse, alors il existe une équivalence faible naturelle*

$$H(M_{et}, p_*K_{\mathbf{Q}}) \simeq G(F)_{\mathbf{Q}}$$

Preuve: Les points (1) et (2) proviennent du théorème de descente (5.11) appliqué au préfaisceau flasque $p_*G_{\mathbf{Q}}$ sur M_{et}, et de la formule de projection $p_* \circ p^* = \times o(H)$ pour le (2).

Pour démontrer (3), il suffit d'après le théorème de démontrer que

$$p_*K_{\mathbf{Q}} \to p_*G_{\mathbf{Q}}$$

est une équivalence faible de préfaisceaux en spectres sur M_{et}. En localisant sur M_{et}, on se ramène au cas où $F = [X/H]$ est un champ quotient d'un schéma lisse X, par un groupe fini H. Mais alors on sait que tout faisceau cohérent sur F admet une résolution par des fibrés vectoriels ([Th2, 5.3]), et donc que le morphisme naturel

$$K(F) \to G(F)$$

est une équivalence faible.$\square$

3.2.2 Descente Homologique

Nous allons maintenant démontrer un résultat de descente de la G-théorie étale. Il va nous permettre d'étendre la définition des images directes aux morphismes propres quelconques. La méthode de construction est tirée de [G3].

Soit F un champ algébrique et $p : X \to F$ un morphisme propre surjectif, avec X un schéma. Le nerf de X sur F est un schéma simplicial à faces propres $\mathcal{N}(X/F)$. On peut donc en prendre l'image par le foncteur covariant G, et obtenir ainsi un spectre simplicial noté $G(\mathcal{N}(X/F))$. La colimite homotopique de ce spectre simplicial sera notée

$$G(X/F) := Hocolim_{\Delta^{op}} G(\mathcal{N}(X/F))$$

Théorème 3.9 *Soit X un schéma et $p : X \to F$ un morphisme propre surjectif. Alors le morphisme naturel*

$$p_* : G(X/F)_{\mathbf{Q}} \to G_{et}(F)_{\mathbf{Q}}$$

est une équivalence faible.

Preuve: En raisonnant par récurrence sur la dimension de F et à l'aide de 3.3, on peut se restreindre à démontrer le théorème pour un ouvert de Zariski de F. Ainsi on se ramène au cas où F est une gerbe sur M, telle qu'il existe un revêtement galoisien $M' \to M$ fini et une équivalence

$$F' := F \times_M M' \simeq [V/H]$$

avec V un schéma et H un groupe fini opérant sur V. Notons $X' := X \times_F F'$.

Rappelons que si E est un spectre muni d'une action d'un groupe H, on note $E_H := Hocolim_H E$.

Considérons alors le diagramme homotopiquement commutatif d'images directes suivant

$$\begin{tikzcd} G(X/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r] & G_{et}(F)_{\mathbf{Q}} \\ (G(X'/F')_{\mathbf{Q}})_H \arrow[u] \arrow[r] & (G_{et}(F')_{\mathbf{Q}})_H \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Comme les flèches verticales sont des équivalences faibles (d'après 3.8), on se ramène à démontrer que $(G(X'/F')_{\mathbf{Q}})_H \to (G_{et}(F')_{\mathbf{Q}})_H$ est une équivalence faible. Mais comme les co-invariants homotopiques préservent les équivalences faibles, il nous suffit de démontrer le théorème pour $X' \to F'$. En utilisant le même argument avec le revêtement galoisien $V \to F'$, il suffit de démontrer le théorème dans le cas où F est un schéma.

Comme précédemment on peut se restreindre à un ouvert générique de F. On peut alors supposer que $X \to F$ possède une section après un changement de base fini $F' \to F$. On peut même supposer que $F' \to F$ se factorise en

$$F' \xrightarrow{a} F'' \xrightarrow{b} F$$

avec a un morphisme radiciel, et b un revêtement galoisien de groupe H. Notons $c : X' := X \times_F F' \to F'$ et $d : X'' := X \times_F F'' \to F''$. On dispose alors du diagramme homotopiquement commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} G(X/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "p_*"] & G(F)_{\mathbf{Q}} \\ G(X''/F'')_{\mathbf{Q}} \arrow[u] \arrow[r, "d_*"] & G(F'')_{\mathbf{Q}} \arrow[u, "b_*"'] \\ G(X'/F')_{\mathbf{Q}} \arrow[u] \arrow[r, "c_*"] & G(F')_{\mathbf{Q}} \arrow[u, "a_*"'] \end{tikzcd}$$

Comme a est radiciel, on sait que $a_* : G(F')_{\mathbf{Q}} \to G(F'')_{\mathbf{Q}}$ est une équivalence faible. Il en est de même du morphisme induit $G(X'/F')_{\mathbf{Q}} \to G(X''/F'')_{\mathbf{Q}}$. De plus, comme le morphisme $X' \to F'$ possède une section, $c_* : G(X'/F')_{\mathbf{Q}} \to G(F')_{\mathbf{Q}}$ est une équivalence faible ([G3, $4-1$ (I)]). Ceci implique que le théorème est vrai pour $X'' \to F''$. En prenant les co-invariants homotopiques on obtient un nouveau diagramme qui commute à homotopie près

$$\begin{tikzcd}
G(X/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "p_*"] & G(F)_{\mathbf{Q}} \\
(G(X''/F'')_{\mathbf{Q}})_H \arrow[u] \arrow[r, "d_*"] & (G(F'')_{\mathbf{Q}})_H \arrow[u, "b_*"]
\end{tikzcd}$$

De nouveau les flèches verticales sont des équivalences faibles. Le théorème étant vrai pour X''/F'', il est vrai pour X/F. $\square$.

Passons à la construction des images directes en G-théorie étale.

Soit $f : F \to F'$ un morphisme propre. A l'aide de [D-M, 4.12], choisissons un schéma X et un morphisme propre surjectif

$$p : X \to F$$

On dispose alors d'un diagramme de morphismes propres

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}(X/F) \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\
F \arrow[r, "f"] & F'
\end{tikzcd}$$

En appliquant le foncteur covariant $(G_{et})_{\mathbf{Q}}$, on obtient un diagramme de spectres

$$\begin{tikzcd}
G(X/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[d, "p_*"'] \arrow[dr, "q_*"] & \\
G_{et}(F)_{\mathbf{Q}} & G_{et}(F')_{\mathbf{Q}}
\end{tikzcd}$$

D'après le théorème 3.9, p_* est une équivalence faible. On dispose donc d'un morphisme bien défini à homotopie près

$$f_* = q_* \circ (p_*^{-1}) : G_{et}(F)_{\mathbf{Q}} \to G_{et}(F')_{\mathbf{Q}}$$

Soit $p' : X' \to F$ est un autre morphisme propre surjectif, et $Z = X \times_F X'$. Alors, les diagrammes suivants commutent à homotopie près

$$\begin{tikzcd}
G(Z/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & G(X/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[d, "p_*"] \\
G(X'/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "(p')_*"] & G_{et}(F)_{\mathbf{Q}}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
G(Z/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r] \arrow[d] & G(X/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[d, "q_*"] \\
G(X'/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "(q')_*"] & G_{et}(F')_{\mathbf{Q}}
\end{tikzcd}$$

Ainsi, le morphisme $f_* : G_{et}(F)_{\mathbf{Q}} \to G_{et}(F')_{\mathbf{Q}}$ est indépendant à homotopie près du choix de $p : X \to F$. Il est alors facile de voir que $F \to G_{et}(F)$ est un foncteur covariant à homotopie près pour tous les morphismes propres.

Lemme 3.10 *Soit X un schéma et H un groupe fini opérant sur X. Alors la projection $p : X \to X/H$ induit des équivalences faibles*

$$p_* : (G(X)_{\mathbf{Q}})_H \to G(X/H)_{\mathbf{Q}}$$

$$p_* : G(X)^H_{\mathbf{Q}} \to G(X/H)_{\mathbf{Q}}$$

<u>Peuve:</u> Il suffit de considérer le cas où X réduit.

On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G(X)^H_{\mathbf{Q}} \arrow[r] \arrow[dr, "p_*"'] & (G(X)_{\mathbf{Q}})_H \arrow[d, "p_*"] \\ & G(X/H)_{\mathbf{Q}} \end{tikzcd}$$

Comme le groupe H est fini, et que l'on est à coefficients rationnels, le morphisme horizontal est une équivalence faible. Il suffit donc de démontrer la seconde assertion du lemme. Soit $j : Y \hookrightarrow X$ une immersion fermé équivariante, tel que $i : X - Y \hookrightarrow X$ soit dense dans X, et que l'action de H soit sans points fixes sur $X - Y$. On considère le morphisme de suites exactes

$$\begin{tikzcd} G(Y)^H_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "p_*"'] & G(X)^H_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "i^*"] \arrow[d, "p_*"'] & G(X-Y)^H_{\mathbf{Q}} \arrow[d, "p_*"'] \\ G(Y/H)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "j_*"] & G(X/H)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "i^*"] & G((X-Y)/H)_{\mathbf{Q}} \end{tikzcd}$$

En raisonnant par récurrence sur la dimension de X, on peut se restreindre au cas où l'action de H est sans points fixes sur X. Le corollaire 3.8 (2) montre alors que $p_* : G(X)^H_{\mathbf{Q}} \to G(X/H)_{\mathbf{Q}}$ est une équivalence faible. $\square$

Corollaire 3.11 *Soit $p : F \to M$ la projection d'un champ algébrique sur son espace de modules. Alors le morphisme*

$$p_* : G_{et}(F)_{\mathbf{Q}} \to G(M)_{\mathbf{Q}}$$

est une équivalence faible.

<u>Preuve</u> On considère le morphisme de préfaisceaux en spectres sur M_{et}

$$p_* : p_*(G_{et})_{\mathbf{Q}} \to G_{\mathbf{Q}}$$

On sait que le membre de droite est flasque sur M_{et} (3.6 pour un espace algébrique). Le membre de gauche est l'image directe d'un préfaisceau flasque, donc est encore flasque. On peut donc localiser sur M_{et} et se ramener au cas où $F = [X/H]$ est le champ quotient d'un schéma par un groupe fini H.

Prenons le morphisme naturel $q : X \to F$, et notons $r : X \to X/H = M$. On peut alors considèrer le diagramme homotopiquement commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} G(X/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[r, "r_*"] \arrow[d, "q_*"'] & G(M)_{\mathbf{Q}} \\ G_{et}(F)_{\mathbf{Q}} \arrow[ur, "p_*"'] & \end{tikzcd}$$

Par le théorème 3.9, q_* est une équivalence faible. Il nous suffit donc de montrer que r_* est une équivalence faible. Or le nerf $\mathcal{N}(X/F)$ est canoniquement isomorphe au classifiant BHX de l'action de H sur X. Il existe donc une équivalence faible naturelle

$$(G(X)_{\mathbf{Q}})_H \to G(X/F)_{\mathbf{Q}}$$

qui rend homotopiquement commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} (G(X)_{\mathbf{Q}})_H \arrow[r] \arrow[d, "r_*"'] & G(X/F)_{\mathbf{Q}} \arrow[dl, "r_*"'] \\ G_{et}(M)_{\mathbf{Q}} & \end{tikzcd}$$

Le lemme précédent permet de conclure que r_* est une équivalence faible. $\Box$

Il est à noter que ces morphismes d'images directes ne sont pas définis à coefficients entiers, tout au moins lorsque les morphismes ne sont pas représentables. Ils sont l'analogue des images directes de cycles algébriques définis dans [Vi2]. Ainsi le corollaire précédent est un analogue au fait que les groupes de Chow rationnels d'un champ algébrique sont isomorphes à ceux de son espace de modules.

3.2.3 Enveloppes de Chow

Dans le cas des schémas, on sait qu'une enveloppe de Chow $p : Z \to X$ permet de retrouver la G-théorie de X ([G3]). Si maintenant F est un champ algébrique, on verra qu'il existe une notion d'enveloppe de Chow rationnelle permettant de calculer la G-théorie rationnelle de F, en fonction de la G-théorie de certaines gerbes triviales.

Définition 3.12 *Soit F un champ algébrique. Un morphisme propre et représentable de champs*

$$p : F_0 \to F$$

est une enveloppe de Chow rationnelle, si pour tout point x de F, le morphisme induit sur la gerbe résiduelle

$$p^{-1}(\widetilde{x}) \longrightarrow \widetilde{x}$$

possède une section après une extension finie de $k(x)$.

Remarquons par exemple, que le morphisme naturel $X \to [X/H]$ est une enveloppe de Chow rationnelle, si et seulement si H opère sans points fixes sur X.

La condition de la définition est équivalente à dire que pour tout sous-champ fermé intègre F' de F, il existe un sous-champ fermé intègre F_0' de F_0 au-dessus de F', tel que la restriction

$$p : F_0' \to F'$$

admette génériquement une section après un changement de base fini de l'espace de modules de F'.

Si $F' \to F$ est un morphisme propre de champs, on dispose de son nerf $\mathcal{N}(F'/F)$, qui est un champ simplicial à faces propres. En appliquant le foncteur covariant G, on en déduit un spectre simplicial $G(\mathcal{N}(F'/F))$. La colimite homotopique de ce diagramme sera notée $G(F'/F)$.

Proposition 3.13 *Si $p : F_0 \to F$ est une enveloppe de Chow rationnelle, alors le morphisme naturel*

$$p_* : G(F_0/F)_{\mathbf{Q}} \to G(F)_{\mathbf{Q}}$$

est une équivalence faible.

<u>Preuve:</u> Comme dans la preuve de 3.9, on peut se restreindre au cas où $F_0 \longrightarrow F$ possède une section après un changement de base de l'espace de modules de F par un revêtement galoisien. En utilisant 3.8 (2) on se ramène au cas où p possède une section $s : F \to F_0$. On sait alors que $s_* : G(F)_{\mathbf{Q}} \to G(F_0/F)_{\mathbf{Q}}$ est un inverse homotopique de p_* ([G3, $4-1$ (I)]). $\square$

Remarquons que les arguments de la preuve de [G3, $4-1$], entrainent que la proposition se généralise au cas des hyper-enveloppes de Chow rationnelles.

3.3 Théorème de Dévissage

Dans cette section nous allons montrer que les espaces de G-théorie, se décrivent à l'aide de la G-théorie étale du champ des ramifications. Pour cela, nous allons généraliser certains résultats de Vistoli ([Vi]) au cas des champs algébriques.

Nous aurons besoin d'une hypothèse supplémentaire. Elle assure par exemple que les morphismes propres sont tous de dimension cohomologique finie.

Hypothèse 3.14 *Si F est un champ algébrique, on supposera que les ordres d'inertie de tous les points de F sont premiers à la caractéristique de k.*

Pour ce chapitre, on notera $\Lambda = \mathbf{Q}(\mu_\infty)$, avec μ_∞ le sous-groupe de k^* des racines de l'unité, que l'on identifiera à un sous-groupe de $\mathbf{C}^*$, par un plongement fixé

$$\mu_\infty \hookrightarrow \mathbf{C}^*$$

Si E est un spectre, E_Λ désignera $E \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}(\mu_\infty)$.

Théorème 3.15 *Soit F un champ algébrique lisse. Alors il existe une équivalence faible de spectres en Λ-algèbres*

$$\phi_F : G(F)_\Lambda \xrightarrow{\simeq} G_{et}(I_F)_\Lambda$$

De plus, ϕ commute avec les images réciproques, et les produits.

Preuve: Commençons par définir un morphisme

$$\rho : K(I_F) \to K(I_F)_\Lambda$$

Soit V un fibré vectoriel sur I_F. Fixons nous ζ une racine de l'unité dans k.

Soit $f : X \to I_F$ une section au-dessus d'un schéma X. Elle est déterminée par une section $s : X \to F$, et un automorphisme $a \in \pi_1(F(X), s)$. Le fibré f^*V sur X est alors muni d'une action de $< a >$. D'après 3.14, cette action est diagonalisable. On obtient donc une décomposition canonique

$$f^*V \simeq f^*V^{(\zeta)} \oplus W$$

où $f^*V^{(\zeta)}$ est le sous-fibré vectoriel de f^*V sur lequel a opère par multiplication par ζ.

Donnons-nous maintenant deux sections

$$f : X \to I_F$$

$$g : Y \to I_F$$

données respectivement par (s, a) et (t, b), un morphisme $p : Y \to X$, et une homotopie $h : f \circ p \Rightarrow g$. Le cocyle de V

$$\theta_{f,g,h} : (p \circ f)^*V \simeq g^*V$$

étant compatible avec les actions de $< a >$ et $< b >$, on obtient ainsi un cocycle induit

$$\theta_{f,g,h} : (p \circ f)^*V^{(\zeta)} \simeq g^*V^{(\zeta)}$$

De cette façon on définit un fibré vectoriel $V^{(\zeta)}$ sur I_F. De plus, Il est clair que les foncteurs $V \mapsto V^{(\zeta)}$ sont exacts. On pose alors

$$\begin{array}{cccc} \rho : & K(I_F) & \longrightarrow & K(I_F)_\Lambda \\ & V & \mapsto & \sum_{\zeta \in \mu_\infty} \zeta . V^{(\zeta)} \end{array}$$

C'est un morphisme de spectres en anneaux, qui est de plus fonctoriel pour les images réciproques. Soit $\pi : I_F \longrightarrow F$ la projection, et $can : K(I_F) \longrightarrow K_{et}(I_F)$ le morphisme canonique. On considère

$$can \circ \rho \circ \pi^* : K(F)_\Lambda \to K_{et}(I_F)_\Lambda$$

En localisant sur M_{et}, on obtient un morphisme de préfaisceaux en spectres sur M_{et}

$$\phi_F : p_* K_\Lambda \longrightarrow p_* \pi_* (K_{et})_\Lambda$$

Et par le corollaire 3.8 (3), le morphisme cherché

$$\phi_F : G_*(F)_\Lambda \longrightarrow G_{*,et}(I_F)_\Lambda$$

Par construction, il est compatible aux produits et aux images réciproques. Enfin, il est clair que lorsque $F = [X/H]$, on obtient le morphisme ϕ défini dans [Vi, 4.1]. Ainsi ϕ_F est une équivalence faible. $\Box$

Remarquons que même si F n'est pas lisse, il existe toujours un morphisme

$$\phi_F : K(F)_\Lambda \longrightarrow K_{et}(I_F)_\Lambda$$

mais qui n'est pas, à priori, une équivalence faible.

Enfin, si F est une gerbe (éventuellement singulière), il existe encore une équivalence faible canonique de spectres en Λ-modules

$$\phi_F : G(F)_\Lambda \longrightarrow G_{et}(I_F)_\Lambda$$

En effet, comme $\pi : I_F \longrightarrow F$ est étale, on peut appliquer la construction de la preuve précédente.

4 Le Théorème de Grothendieck-Riemann-Roch

On continue à supposer que k contient les racines de l'unité, et que les champs vérifient 3.14.

4.1 Cohomologie des Champs Algébriques

On se place dans $(SchQP/k)_{et}$, le site des schémas quasi-projectifs sur k, muni de la topologie étale. Par la suite tous les schémas sont quasi-projectifs.

Donnons-nous une théorie cohomologique avec images directes. C'est à dire les données suivantes.

- pour tout entier i, un préfaisceau en spectres abéliens $\mathcal{H}^i$ (i.e. associé par la construction de Dold-Puppe à un complexe de préfaisceaux abéliens) flasque sur le site précédent, et muni d'un produit

$$\mathcal{H}^i \wedge \mathcal{H}^j \longrightarrow \mathcal{H}^{i+j}$$

homotopiquement associatif et commutatif. On notera

$$\mathcal{H} := \bigvee_{i \in \mathbf{Z}} \mathcal{H}^i$$

le préfaisceau en spectres en anneaux gradués associé.

- pour chaque entier i, et chaque schéma X, des spectres abéliens $\mathcal{H}'_i(X)$. Pour chaque morphisme propre $f : X \to Y$ de schémas irréductibles un morphisme de spectres abéliens

$$f_* : \mathcal{H}'_i(X) \longrightarrow \mathcal{H}'_{i+dp}(Y)$$

avec p la dimension relative de X sur Y, et d un entier fixé, égal à 1 ou 2. On demande que ces images directes s'étendent en un foncteur

$$X \mapsto \mathcal{H}'(X) := \bigvee_{i \in \mathbf{Z}} \mathcal{H}'_i(X)$$

covariant pour les morphismes propres.

- Pour chaque schéma X, une structure de $\mathcal{H}(X)$-module gradué sur $\mathcal{H}'(X)$. De plus, si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme propre, et $x \in \mathcal{H}'(X)$, $y \in \mathcal{H}(Y)$, alors on a

$$f_*(f^*(y).x) = y.f_*(x)$$

- pour chaque morphisme étale $f : X \to Y$, un morphisme de spectres abéliens

$$f^* : \mathcal{H}'_i(Y) \longrightarrow \mathcal{H}'_i(X)$$

qui fait de $\mathcal{H}'$ un $\mathcal{H}$-module pour les morphismes étales.

- si

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

est cartésien avec p propre et u étale, alors

$$v^* \circ p_* = q_* \circ u^*$$

- si $j : Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée, et $i : U \hookrightarrow X$ l'immersion ouverte complémentaire, alors la suite suivante

  $$\mathcal{H}'_i(Y) \xrightarrow{j_*} \mathcal{H}'_{i+dp}(X) \xrightarrow{i^*} \mathcal{H}'_{i+dp}(U)$$

  est canoniquement une suite exacte.

- si X est un schéma lisse, alors il existe une équivalence faible

  $$p_X : \mathcal{H}^i(X) \longrightarrow \mathcal{H}'_i(X)$$

  compatible avec les produits et les images réciproques.

- Il existe un morphisme de préfaisceaux simpliciaux

  $$C_1 : B\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathcal{H}^d_{[0]}$$

  Et donc un morphisme flexible ([S]) sur les champs associés

  $$C_1 : Pic \longrightarrow \mathcal{H}^d_{[0]}$$

- soit $\pi : P \longrightarrow X$ le fibré projectif associé à un fibré vectoriel de rang $r+1$, et $x = C_1(\mathcal{O}_P(1))$. Alors le morphisme

  $$\begin{array}{ccc} \bigvee_{i=0}^{i=r} \mathcal{H}(X) & \longrightarrow & \mathcal{H}(P) \\ \vee a_i & \mapsto & \sum_i \pi^*(a_i).x \end{array}$$

  est une équivalence faible.

Avant d'aller plus loin, donnons quelques exemples.

- La théorie de Gersten: Notons $\mathcal{K}_i$ le préfaisceau sur $(SchQP/k)_{et}$

  $$X \mapsto K_i(X)$$

  On considère les préfaisceaux en spectres $K(\mathcal{K}_i, i) \otimes \mathbf{Q}$, et on prend pour $\mathcal{H}^i$ les préfaisceaux fibrants associés.

  Soit

  $$\mathcal{R}^i : \bigoplus_{x \in X^{(0)}} K_i(k(x)) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{i-1}(k(x)) \longrightarrow \cdots \bigoplus_{x \in X^{(i)}} K_0(k(x))$$

  le complexe de Gersten de codimension i de X, concentré en degré $[-i, 0]$. On pose

  $$\mathcal{H}'_i(X) := K(\mathcal{R}^i, 0) \otimes \mathbf{Q}$$

  Alors $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ vérifient les axiomes ci-dessus ([G, 1.4 (ii)]), avec $d = 1$.

- La cohomologie de De Rham: Supposons k de caractéristique nulle.

  Pour un schéma X, on considère $K(\Omega_X, 2i)$ le complexe de De Rham de X ([H]), placé en degrés $[-2i, DimX - 2i]$. On prend pour $\mathcal{H}^i$ un modèle fibrant de $K(\Omega_-, 2i)$.

  Notons $Im(X)$ la catégorie filtrante des immersions fermées $X \hookrightarrow Y$, avec Y lisse. La cohomologie de Y à support dans le sous-schéma X est définie par
  $$\mathcal{H}^i_X(Y) = Fib\left(\mathcal{H}^i(Y) \longrightarrow \mathcal{H}^i(Y - X)\right)$$
  L'homologie d'un schéma X est alors définie par
  $$\mathcal{H}'_i = Colim_{Im(X)} E\mathcal{H}^{i+2p}_X(Y)$$
  où p est la codimension de X dans Y, et $E\mathcal{H}^i$ le spectre associé à la résolution canonique de $\Omega[2i]$ définie dans [H, 2].

  Alors $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ vérifient les conditions précédentes avec $d = 2$, au détail près que les images réciproques étales en homologie ne sont fonctorielles que dans un sens flexible ([S]). Elles sont définies de la façon suivante.

  Soit $f : X' \to X$ un morphisme étale. Soit $p : Z_\bullet \to X$ un hyper-recouvrement propre dont toutes les composantes Z_n sont lisses. Un tel hyper-recouvremnent existe d'après [Be]. En prenant l'image de $Z_\bullet$ par le foncteur covariant $E\mathcal{H}$, on obtient un Δ-diagramme de spectres $E\mathcal{H}(Z_\bullet)$. On note la colimite homotopique par $E\mathcal{H}(Z/X)$. Alors le morphisme naturel
  $$p_* : E\mathcal{H}(Z/X) \longrightarrow \mathcal{H}'(X)$$
  est une équivalence faible. On pose $Z'_\bullet \to X'$ l'hyper-recouvrement induit sur X'. Alors on a un morphisme induit sur les Δ-diagrammes
  $$f^* : E\mathcal{H}(Z'_\bullet) \longrightarrow E\mathcal{H}(Z_\bullet)$$
  On conclut en prenant la colimite homotopique. Cette construction et la formule de projection permettent aussi de définir la structure de $\mathcal{H}(X)$-module sur $\mathcal{H}'(X)$.

- Les complexes de Chow-Bloch: Si l'on se retreint aux schémas quasi-projectifs lisses, on peut prendre
  $$\mathcal{H}^i(X) = \mathbf{Z}^i(X) \otimes \mathbf{Q}$$
  le complexe de Bloch des cycles de codimension i sur X ([B]). En prenant $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$, les conditions précédentes seront vérifiées pour les schémas lisses. Si on considère des schémas singuliers, la définition marche encore sauf que seul $\mathcal{H}'$ existe. On laisse le soin au lecteur d'apporter les quelques modifications que cela entraine par la suite.

Définition 4.1 *Soit F un champ algébrique lisse. On définit la cohomologie et l'homologie étale de F par*
$$H^p_{et}(F, i) := H^{p-di}(F_{et}, \mathcal{H}^i)$$

$$H_p^{et}(F,i) := H^{p-di}(F_{et},\mathcal{H}'_i)$$
$$H_{et}^{\bullet}(F,*) := \bigoplus_{i,p} H_{et}^{p}(F,i)$$
$$H_{\bullet}^{et}(F,*) := \bigoplus_{i,p} H_p^{et}(F,i)$$

Nous noterons aussi

$$\mathcal{H}(F) := H(F_{et},\mathcal{H})$$
$$\mathcal{H}'(F) := H(F_{et},\mathcal{H}')$$

les spectres de cohomologie et d'homologie de F.

Nous précisons que l'indice p de $H_p^{et}(F,*)$ désigne la codimension, et non la dimension comme il en est l'usage.

Pour définir les images directes nous aurons besoin du résultat de descente analogue à 3.9.

Proposition 4.2 *Soit $p : X \to F$ un morphisme propre et surjectif, avec X un schéma quasi-projectif. Alors le morphisme naturel*

$$\mathcal{H}'(X/F)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}}$$

est une équivalence faible.

<u>Preuve:</u> C'est la même que pour 3.9. $\square$

Soit $f : F' \longrightarrow F$ un morphisme propre de champs algébriques. Considèrons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ F' \arrow[r, "f"'] & F \end{tikzcd}$$

où q est un morphisme propre et surjectif. On dispose alors du diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}'(X'/F')_{\mathbf{Q}} \arrow[d, "q_*"'] \arrow[dr, "p_*"] & \\ \mathcal{H}'(F')_{\mathbf{Q}} & \mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}} \end{tikzcd}$$

Comme q_* est une équivalence faible, on peut définir $f_* : \mathcal{H}'(F')_{\mathbf{Q}} \longrightarrow \mathcal{H}'(F)_{\mathbf{Q}}$ par

$$f_* := p_* \circ (q_*)^{-1}$$

On obtient ainsi un morphisme bien défini

$$p_* : H_{\bullet}^{et}(F',*)_{\mathbf{Q}} \to H_{\bullet}^{et}(F,*)_{\mathbf{Q}}$$

Si $p : F \longrightarrow Speck$ est le morphisme structural d'un champ propre, on notera

$$\int_F^{et} := p_* : H_\bullet^{et}(F,*)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow H_\bullet^{et}(Speck,*)_{\mathbf{Q}}$$

La construction de Gillet des classes de Chern ([G, 2.2]) donne des morphismes de préfaisceaux simpliciaux

$$C_i : K_{[0]} \to \mathcal{H}^i_{[o]}$$

En passant à la cohomologie on obtient des classses de Chern étale

$$C_i^{et} : K_{m,et}(F) \longrightarrow H_{et}^{di-m}(F,i)$$

vérifiant les propriétés citées dans [G, 2.1]. Sont associés par les formules habituelles, le caratère de Chern et les classes de Todd

$$Ch^{et} : K_{*,et}(F) \longrightarrow H_{et}^{\bullet}(F,*)$$

$$Td^{et} : K_{*,et}(F) \longrightarrow H_{et}^{\bullet}(F,*)$$

Nous possèdons de cette façon une théorie cohomologie-homologie étale pour les champs algébriques, vérifiant toutes les propriétés habituelles (localisation, homotopie ...).

Remarque: Voici un exemple très simple montrant que cette théorie étale ne peut pas donner de formule de Hirzebruch-Riemann-Roch.

Soit $F = [Speck/H]$ avec H un groupe fini abélien par exemple. Dans ce cas le fibré tangent est trivial, et la transformation de Riemann-Roch

$$\tau_F : K_0(F) \to H_{et}^{d*}(F,\Gamma(\bullet))_{\mathbf{Q}}$$

est le caractère de Chern. Elle est donc multiplicative. Le corollaire précédent implique que

$$p_* : H_{et}^{d*}(F,\Gamma(\bullet)) \simeq H_{et}^{d*}(Speck,\Gamma(\bullet))_{\mathbf{Q}}$$

Supposons que la théorie cohomologique vérifie

$$H_{et}^{d*}(Speck,\Gamma(\bullet))_{\mathbf{C}} = \mathbf{C}$$

C'est le cas pour les exemples précédents. Si la formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch était vérifiée on aurait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K_0(F)_{\mathbf{C}} \arrow[r, "Ch"] \arrow[d, "p_*"'] & H_{et}^{d*}(F,\Gamma(\bullet))_{\mathbf{C}} \arrow[d, "\wr p_*"] \\ \mathbf{C} \arrow[r, "Id"'] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

En identifiant $K_0(F)$ avec le groupe de Grothendieck des représentations de H dans k, on aurait pour tout $k[H]$-module V de dimension finie

$$Ch(V) = Dim(V^H)$$

Prenons V de dimension 1 non triviale. Alors $V^H = (0)$. Soit m l'ordre de H, alors $V^{\otimes m} = 1$. On aurait donc

$$Ch(V^{\otimes m}) = Ch(V)^m = Ch(1) = 1 \Rightarrow Ch(V) \neq 0$$

Ce qui est absurde.

Pour remédier à ce problème nous proposons une nouvelle définition de la cohomologie d'un champ, que nous appellerons (voir la remarque suivante) "cohomologie à coefficients dans les représentations". Sa définition est directement inspirée du théorème 3.15.

Définition 4.3 *Soit F un champ algébrique. On définit la cohomologie et l'homologie de F à coefficients dans les représentations par*

$$H^p_{rep}(F, i) := H^p_{et}(I_F, i)$$

$$H_p^{rep}(F, i) := H_p^{et}(I_F, i)$$

On notera de même

$$\mathcal{H}_{rep}(F) := \mathcal{H}(I_F)$$

$$\mathcal{H}'_{rep}(F) := \mathcal{H}'(I_F)$$

$$H^\bullet_{rep}(F, *) := \bigoplus_{i,p} H^p_{rep}(F, i)$$

$$H_\bullet^{rep}(F, *) := \bigoplus_{i,p} H_p^{rep}(F, i)$$

Si $f : F \longrightarrow F'$ est un morphisme de champs, et $If : I_F \longrightarrow I_{F'}$ le morphisme induit, on définit

$$f^* : H^\bullet_{rep}(F, *) = H^\bullet_{et}(I_F, *) \xrightarrow{If^*} H^\bullet_{et}(I_{F'}, *) = H^\bullet_{rep}(F', *)$$

De la même façon si $f : F \longrightarrow F'$ est propre, on pose

$$f_* : H_\bullet^{rep}(F, *)_{\mathbf{Q}} = H_\bullet^{et}(I_F, *)_{\mathbf{Q}} \xrightarrow{If_*} H_\bullet^{et}(I_{F'}, *)_{\mathbf{Q}} = H_\bullet^{rep}(F', *)_{\mathbf{Q}}$$

Si $p : F \longrightarrow Speck$ est la projection d'un champ propre, on notera

$$\int_F = p_* : H_\bullet^{rep}(F, *)_{\mathbf{Q}} \longrightarrow H_\bullet^{rep}(Speck, *)_{\mathbf{Q}}$$

le morphisme induit.

Les propriétés de cette cohomologie se déduisent immédiatement de celles de la cohomologie étale. Comme d'habitude, pour tout $\mathbf{Z}$-module A, nous noterons A_Λ pour $A \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$.

Proposition 4.4 *La correspondance $F \mapsto H^\bullet_{rep}(F,*)_\Lambda$ est un foncteur contravariant de la 2-catégorie des champs algébriques vers les Λ-algébres commutatives bi-graduées.*

La correspondance $F \mapsto H^{rep}_\bullet(F,*)_\Lambda$ est un foncteur covariant de la 2-catégorie des champs algébriques et morphismes propres vers les Λ-modules. C'est aussi un foncteur contravariant pour les morphismes étales représentables. De plus, on a les propriétés suivantes

1. *pour tout champ F, $H^{rep}_\bullet(F,*)_\Lambda$ est un $H^\bullet_{rep}(F,*)_\Lambda$-module bi-gradué. Si $f : F' \longrightarrow F$ est un morphisme propre, $x \in H^{rep}_\bullet(F,*)_\Lambda$ et $y \in H^\bullet_{rep}(F',*)_\Lambda$, alors*
$$f_*(f^*(x).y) = x.f_*(y)$$

2. *si F est lisse, il existe un isomorphisme de $H^\bullet_{rep}(F,*)_\Lambda$-module*
$$p_F : H^\bullet_{rep}(F,*)_\Lambda \simeq H^{rep}_\bullet(F,*)_\Lambda$$
compatible avec les images réciproques et les produits.

3. *si le carré suivant est cartésien*
$$\begin{tikzcd} G' \arrow[r, "q"] \arrow[d, "v"'] & F' \arrow[d, "u"] \\ G \arrow[r, "p"'] & F \end{tikzcd}$$
avec p propre, et u étale représentable, alors
$$q_* \circ v^* = u^* \circ p_*$$

4. *si $j : F' \hookrightarrow F$ est une immersion fermée, et $i : U \hookrightarrow F$ l'immersion complémentaire, alors la suite*
$$\mathcal{H}'_{rep}(F') \xrightarrow{j_*} \mathcal{H}'_{rep}(F) \xrightarrow{i^*} \mathcal{H}'_{rep}(U)$$
est naturellement exacte.

5. *si F est un champ lisse, et $p : V \to F$ est un fibré vectoriel, alors le morphisme naturel*
$$p^* : H^\bullet_{rep}(F,*) \longrightarrow H^\bullet_{rep}(V,*)$$
est un isomorphisme.

Remarque: Supposons que $k = \mathbf{C}$, et que l'on prenne la cohomologie de De Rham. Si F est un champ algébrique lisse, on peut lui associer un champ analytique F^{an}. Le théorème de comparaison de Grothendieck ([Gr, Thm. 1′]), donne alors un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres

$$H^{\bullet}_{rep}(F) \simeq H^{\bullet}((I_F)_{top}, \mathbf{C})$$

où $(I_F)_{top}$ est le site topologique sur $(I_F)^{an}$, et $\mathbf{C}$ le faisceau constant de fibre $\mathbf{C}$. Soit $\pi : I_F \to F$ la projection, et $p : F \to M$ la projection sur l'espace de modules. On pose $R = p_* \circ \pi_*(\mathbf{C})$, c'est un faisceau en $\mathbf{C}$-algèbres sur M, dont la fibre au point géométrique $x \in M$ est isomorphe à $\mathbf{C}(H_x)$, la $\mathbf{C}$-algèbre des fonctions centrales sur le groupe d'isotropie H_x de x. On peut donc écrire

$$H^{\bullet}_{rep}(F) \simeq H^{\bullet}(M_{top}, R)$$

Cet isomorphisme explique le nom de "cohomologie à coefficients dans les représentations", en gardant à l'esprit que les éléments de $\mathbf{C}(H_x)$ s'identifient à des représentations virtuelles de H_x, à coefficients complexes.

Définition 4.5 *Soit F un champ algébrique. On définit le caractère de Chern par la composition*

$$K_m(F)_\Lambda \xrightarrow{\phi_F} K_{m,et}(I_F)_\Lambda \xrightarrow{Ch^{et}} H^{2i-m}_{et}(I_F, i)_\Lambda = H^{2i-m}_{rep}(F, i)_\Lambda$$

Avant d'énoncer le théorème de Riemann-Roch, il nous reste à définir la classe de Todd d'un champ lisse.

Soit F un champ algébrique lisse, et $\pi : I_F \to F$ la projection canonique. Notons $\mathcal{N}^\vee = \Omega_{I_F/F}$ le fibré conormal de I_F relativement à F, $\lambda^i : K_0(I_F) \to K_0(I_F)$ la i-ème λ-opération ([FL, V, 1]), et

$$\begin{array}{cccc} \lambda_{-1} : & K_0(I_F) & \longrightarrow & K_0(I_F) \\ & x & \mapsto & \sum_i (-1)^i \lambda^i(x) \end{array}$$

En utilisant les notations suivant le théorème 3.15, notons

$$\alpha_F := can \circ \rho\,(\lambda_{-1}(\mathcal{N}^\vee)) \in K_{0,et}(I_F)_\Lambda$$

Lemme 4.6 *L'élément α_F est inversible dans l'anneau $K_{0,et}(I_F)_\Lambda$.*

Preuve: Soit m le nombre de composantes connexes de I_F, et

$$rk : K_{0,et}(I_F)_\Lambda \to \Lambda^m$$

l'application rang. On sait alors qu'un élément de $K_{0,et}(I_F)_\Lambda$ est inversible si et seulement si son rang est inversible dans Λ^m. Comme ceci est local sur M_{et}, on peut supposer que F est un champ quotient. Le lemme est alors [Vi, 1.8].□

Définition 4.7 *Soit F un champ algébrique lisse. On définit sa classe de Todd par*

$$Td(F) := Ch^{et}(\alpha_F^{-1}).Td^{et}(T_{I_F})$$

La transformation de Riemann-Roch est définie par

$$\begin{array}{cccc} \tau_F : & K_m(F) & \longrightarrow & H^{\bullet}_{rep}(F,*) \\ & x & \mapsto & Ch(x).Td(F) \end{array}$$

4.2 Démonstration du Théorème

On en arrive au théorème de Grothendieck-Riemann-Roch. Pour pouvoir le démontrer nous aurons besoin d'hypothèses supplémentaires sur les champs que l'on considère.

Hypothèse 4.8 *Les champs algébriques F considérés, vérifieront les hypothèses suivantes*

1. *l'espace de modules M de F est un schéma quasi-projectif.*
2. *tout faisceau cohérent sur F est quotient d'un faisceau localement libre.*

Remarquons que la seconde hypothèse est vérifiée dans tous les exemples que l'on rencontre (champs de modules de courbes, de variétés abéliennes ...). En effet ces champs sont construits en prenant des quotients de schémas quasi-projectifs par des actions de groupes réductifs. Et on sait que ces champs vérifient la seconde hypothèse ([Th2, 5.6]). De plus, elle entraine que le morphisme naturel

$$K_*(F) \longrightarrow G_*(F)$$

est un isomorphisme quand F est lisse.

Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droite très ample sur M, et $\mathcal{L}' = p^*\mathcal{L}$ le fibré induit sur F. Alors $\mathcal{L}'$ est ample sur F. En particulier, les deux hypothèses entrainent que tout morphisme propre représentable est projectif ([Ko, 3.3]).

Proposition 4.9 *Soit F un champ algébrique vérifiant 4.8, alors il existe une enveloppe de Chow rationnelle*

$$q : F_0 \longrightarrow F$$

avec F_0 une gerbe triviale sur un schéma quasi-projectif et q un morphisme fini.

<u>Preuve:</u> Soit $X \longrightarrow F$ un morphisme fini et surjectif, avec X un schéma quasi-projectif normal. Un tel morphisme existe d'après [Vi2, 2.6]. On considère le morphisme induit sur les espaces de modules $X \to M$, et $F_X = F \times_M X \to X$ le changement de base. Alors, par construction, le morphisme $X \to F$ induit une section de la projection $F_X \longrightarrow X$

$$s : X \longrightarrow F_X$$

Notons F'_X la normalisation de F_X. On a alors un morphisme fini représentable

$$F'_X \longrightarrow F$$

qui vérifie la condition de 3.12 pour les points génériques de F. Or F'_X et X sont normaux, et $F'_X \longrightarrow X$ possède une section. On sait alors d'après [Vi2, 2.7] que F'_X est une gerbe sur X, qui est triviale car elle possède une section.

Il existe alors un sous-espace ouvert dense $U \hookrightarrow M$, tel que le morphisme induit au-dessus de U

$$q_U : (F_X)_U \longrightarrow F_U$$

possède une section après un changement de base fini de U. En procédant alors par récurrence sur $DimF$, la proposition est vraie pour le fermé complémentaire réduit $F' = F - F_U$. Soit $F'_0 \longrightarrow F'$ un morphisme vérifiant les conditions demandées. On pose alors

$$F_0 = F_X \coprod F'_0$$

Ainsi, le morphisme $q : F_0 \longrightarrow F$ vérifie bien les conditions de la proposition. $\square$

Théorème 4.10 *(Grotendieck-Riemann-Roch) Soit $\mathcal{CH}$ la catégorie des champs F, vérifiants 3.14 et 4.8. Alors, pour tout champ F de $\mathcal{CH}$, il existe un morphisme de Λ-algèbres*

$$\tau_F : G_m(F)_\Lambda \longrightarrow H_\bullet^{rep}(F, *)_\Lambda$$

vérifiant

1. *τ_F commute avec les images directes de morphismes propres de $\mathcal{CH}$.*
2. *τ_F commute avec les images réciproques de morphismes représentables étales de $\mathcal{CH}$.*
3. *si F est un champ lisse de $\mathcal{CH}$, alors*

   $$\tau_F(x) = Ch(x).Td(F)$$

   pour tout $x \in K_*(F)$.
4. *si F est dans $\mathcal{CH}$, $x \in K_*(F)$, et $y \in G_*(F)$, alors*

   $$\tau_F(x.y) = Ch(x).\tau_F(y)$$

5. *si F est un schéma, alors τ_F est le morphisme défini dans [G, 4.1].*

Preuve: Pour ce qui suit, tous les coefficients seront étendus à Λ. Pour simplifier les notations nous n'écrirons pas l'indice Λ.

Commençons par démontrer (1) dans le cas des champs lisses.

Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre de champs lisses de $\mathcal{CH}$, et $If : I_F \longrightarrow I_{F'}$ le morphisme induit. Pour un champ G, on notera π_G la projection de I_G sur G.

Lemme 4.11 *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} G_*(F) \arrow[r, "\alpha_F^{-1}.\phi_F"] \arrow[d, "f_*"'] & G_{*,et}(I_F) \arrow[d, "If_*"] \\ G_*(F') \arrow[r, "\alpha_{F'}^{-1}.\phi_{F'}"'] & G_{*,et}(I_F) \end{tikzcd}$$

<u>**Preuve:**</u> On procède en deux étapes.

<u>Etape (a):</u> Le morphisme f est représentable.

D'aprés l'hypothèse 4.8, f est en fait un morphisme projectif. On choisit alors une factorisation

$$F \xrightarrow{j} P \xrightarrow{p} F'$$

où j est une immersion fermée, et P un fibré projectif associé à un fibré vectoriel V sur F'. Par fonctorialité, il nous suffit donc de démontrer le lemme pour j et p.

On sait que

$$\phi_P \circ j_* = can \circ \rho \circ \pi_P^* \circ j_*$$

Or, comme j est une immersion fermée, le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{tikzcd} I_F \arrow[r, "Ij"] \arrow[d, "\pi_F"'] & I_P \arrow[d, "\pi_P"] \\ F \arrow[r, "j"'] & P \end{tikzcd}$$

La formule d'excès d'intersection ([Ko, 3.8]), donne

$$\pi_P^* \circ j_* = Ij_* \circ \lambda_{-1}(\mathcal{N}).\pi_F^*$$

où $\mathcal{N}$ est le fibré virtuel conormal d'excès du diagramme cartésien précédent

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_F^\vee - Ij^*(\mathcal{N}_P^\vee)$$

avec $\mathcal{N}_F^\vee$ (resp. $\mathcal{N}_P^\vee$) le fibré conormal de I_F relativement à F (resp. de I_P relativement à P). Ainsi,

$$\begin{aligned} \phi_P \circ j_* &= can \circ \rho \circ \lambda_{-1}(\mathcal{N}_P^\vee).Ij_* \circ \lambda_{-1}(\mathcal{N}_F^\vee)^{-1}.\pi_F^* \\ &= \alpha_P.Ij_* \circ \alpha_F^{-1}.\phi_F \end{aligned}$$

Ce qui démontre le lemme pour le morphisme j.

Pour le cas de la projection $p : P \longrightarrow F'$, d'un fibré projectif de rang r, la formule du fibré projectif implique qu'il suffit de vérifier que pour tout entier m, avec $0 \leq m \leq r$, on a

$$Ip_*(\alpha_P^{-1}.\phi_P(\mathcal{O}_P(m)) = \alpha_F^{-1}.\phi_F(p_*\mathcal{O}_P(m))$$

où $\mathcal{O}_P(1)$ est le fibré canonique sur P, et $\mathcal{O}_P(m) = \mathcal{O}_P(1)^{\otimes m}$. Cette formule se vérifie par un cacul direct, mais un peu long.

Remarquons que la démonstration précédente reste valable dans le cas où F est une gerbe éventuellement singulière. On dispose ainsi du lemme avec F une gerbe quelconque, et f un morphisme projectif.

<u>Etape (b):</u> Cas général.

Remarquons d'abors, que lorsque F et F' sont des gerbes triviales (éventuellements singulières) on a clairement un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} G_*(F) \arrow[r, "\phi_F"] \arrow[d, "f_*"'] & G_{*,et}(I_F) \arrow[d, "If_*"'] \\ G_*(F') \arrow[r, "\phi_{F'}"'] & G_{*,et}(I_{F'}) \end{tikzcd}$$

D'aprés 4.9 il existe des enveloppes de Chow rationnelles finies

$$q : F_0 \longrightarrow F$$

$$q' : F_0' \longrightarrow F'$$

telle que les champs F_0 et F_0' soient des gerbes triviales sur des schémas, et qu'il existe un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{tikzcd} F_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "q"'] & F_0' \arrow[d, "q'"] \\ F \arrow[r, "f"'] & F' \end{tikzcd}$$

Soient $Iq : I_{F_0} \longrightarrow I_F$, et $Iq' : I_{F_0'} \longrightarrow I_{F'}$ les morphismes induits.

Considèrons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & G_*(F_0) \arrow[rr, "(f_0)_*"] \arrow[dl, "q_*"] \arrow[dd, "\phi_{F_0}"] & & G_{*,et}(F_0) \arrow[dl, "q'_*"] \arrow[dd, "\phi_{F'_0}"] \\
G_*(F) \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dd, "\phi_F"] & & G_*(F') \arrow[dd, "\phi_{F'}"] & \\
 & G_{*,et}(I_{F_0}) \arrow[rr, "(If_0)_*"] \arrow[dl, "Iq_*"] & & G_{*,et}(I_{F'_0}) \arrow[dl, "Iq'_0"] \\
G_{*,et}(I_F) \arrow[rr, "If_*"] & & G_{*,et}(I_{F'}) &
\end{tikzcd}$$

Si nous montrons que le morphisme $q_* : G_*(F_0) \longrightarrow G_*(F)$ est surjectif, il suffit alors de montrer que toutes les faces, sauf la face frontale, commutent. Or, il est clair que les deux faces horizontales commutent. La face du fond commute car F_0 et F'_0 sont des gerbes triviales. Enfin les faces latérales commutent d'après l'étape (a).

Par définition d'une enveloppe de Chow rationnelle, le morphisme

$$I_q : I_{F_0} \longrightarrow I_F$$

est fini et surjectif. Appliquons l'étape (a) au morphisme q. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G_*(F_0) \arrow[r, "\phi_{F_0}"] \arrow[d, "q_*"] & G_{*,et}(I_{F_0}) \arrow[d, "Iq_*"] \\
G_*(F) \arrow[r, "\phi_F"] & G_{*,et}(I_F)
\end{tikzcd}$$

Le théorème 3.15 implique que q_* est surjectif si et seulement si Iq_* l'est. Comme I_F est lisse, la formule de projection implique que Iq_* est surjectif si le rang de $Iq_*(1)$ est inversible dans $G_{et,*}(I_F)$, ce qui est vrai car Iq est fini et surjectif. $\Box$

Lemme 4.12 *Soit $f : F \longrightarrow F'$ un morphisme propre de champs lisses de $\mathcal{CH}$. Alors, le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
K_{*,et}(F) \arrow[r, "Ch^{et}(-).Td^{et}(T_F)"] \arrow[d, "f_*"] & H^{\bullet}_{et}(F,*) \arrow[d, "f_*"] \\
K_{*,et}(F') \arrow[r, "Ch^{et}(-).Td^{et}(T_{F'})"] & H^{\bullet}_{et}(F',*)
\end{tikzcd}$$

Preuve: La preuve suit le même schéma que celle du lemme précédent.

Etape (a): Le morphisme f est représentable.

On sait qu'il est alors projectif. Dans ce cas la démonstration est presque mot pour mot celle de [G, 4.1]. En effet les seules propriétés dont on a besoin sont, la déformation vers le cone normal, et la structure de la G-théorie d'un fibré projectif.

Etape (b): Cas général.

Soit $p : X \rightarrow F'$ un morphisme propre et génériquement fini, avec X un schéma lisse. Un tel morphisme p existe d'aprés [D-M, 4.12] et [Be]. Alors les morphismes

$$p_* : G_{*,et}(X) \longrightarrow G_{*,et}(F)$$

sont surjectifs. De plus $f \circ p : X \rightarrow F'$ est représentable. En utilisant l'étape (a) pour p et $f \circ p$, on termine la preuve du lemme. $\Box$

Revenons à notre morphisme $f : F \longrightarrow F'$. Par définition,

$$\tau_F(-) = Ch^{et}(\alpha_F^{-1}.\phi_F(-)).Td^{et}(T_{I_F})$$

Ainsi le lemme 4.12 appliqué à $If : I_F \longrightarrow I_{F'}$, donne

$$f_*(\tau_F(-)) = Ch^{et}(f_*(\alpha_F^{-1}.\phi_F(-))).Td^{et}(T_{I_{F'}})$$

Une application du lemme 4.11 au second membre donne

$$\begin{aligned} f_*(\tau_F(-)) &= Ch^{et}(\alpha_{F'}^{-1}.\phi_{F'}(f_*(-))).Td^{et}(T_{I_{F'}}) \\ &= Ch^{et}(\alpha_{F'})^{-1}.Td^{et}(T_{I_{F'}}).Ch^{et}(\phi_F(f_*(-))) \\ &= \tau_{F'}(f_*(-)) \end{aligned}$$

Indiquons brièvement comment on étend τ aux champs singuliers.

Si F est un champ de $\mathcal{CH}$, on va construire τ_F comme le composé

$$G(F) \xrightarrow{\psi_F} G_{et}(I_F) \xrightarrow{\tau^{et}_{I_F}} H^{rep}_{\bullet}(F,*)$$

Soit $p : F_\bullet \longrightarrow F$ une hyper-enveloppe de Chow rationnelle, telle que chaque F_m soit une gerbe triviale $X_m \times BH_m$. Chaque morphisme $F_n \rightarrow F_m$ défini deux morphismes

$$X_n \rightarrow X_m$$

$$H_n \rightarrow H_m$$

et donc des morphismes d'inductions sur les algèbres de fonctions centrales à valeurs dans Λ

$$\Lambda(H_n) \rightarrow \Lambda(H_m)$$

On peut donc définir un spectre simplicial

$$G(R) : [n] \to G(X_n) \otimes \Lambda(H_n)$$

Notons que l'on a une équivalence faible canonique

$$\psi_{F_n} : G(F_n)_\Lambda \longrightarrow G(X_n) \times \Lambda(H_n)$$

qui est compatible avec les images directes, et donc une équivalence de spectres simpliciaux

$$\psi_{F_\bullet} : G(F_\bullet/F)_\Lambda \longrightarrow G(R)$$

D'autre part, les espaces de modules MI_{F_n} de I_{F_n} sont naturellement isomorphes à $X_n \times c(H_n)$, où $c(H_n)$ est l'ensemble des classes de conjugaisons du groupe H_n. Ainsi on a une équivalence faible naturelle

$$G(MI_{F_n})_\Lambda \simeq G(X_n) \otimes \Lambda(H_n)$$

De plus, les morphismes $I_{F_n} \longrightarrow F$ définissent des morphismes $MI_{F_n} \longrightarrow M$, et donc un morphisme de spectre simplicial

$$q_* : G(R) \longrightarrow G(M)_\Lambda$$

Le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
G(F_\bullet/F)_\Lambda \arrow[r, "\phi_{F_\bullet}"] \arrow[d, "p_*"'] & G(R) \arrow[d, "q_*"] \\
G(F)_\Lambda & G(MI_F)_\Lambda
\end{tikzcd}$$

et la proposition 3.13 appliquée à p, permettent alors de poser

$$\psi_F = q_* \circ \phi_{F_\bullet} \circ (p_*)^{-1} : G_*(F)_\Lambda \longrightarrow G_*(MI_F)_\Lambda$$

Si $r : I_F \longrightarrow I_M$ est la projection de I_F sur son espace de modules, on définit le second par le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
G_{*,et}(I_F)_\Lambda \arrow[r, "\tau^{et}_{I_F}"] \arrow[d, "\wr r_*"'] & H^{rep}_\bullet(F,*)_\Lambda \arrow[d, "\wr r_*"] \\
G_*(IM)_\Lambda \arrow[r, "\tau_{IM}"'] & H_\bullet(IM,*)_\Lambda
\end{tikzcd}$$

où τ_{IM} est défini dans [G, 4.1].

On vérifie aisément que ψ_F et $\tau^{et}_{I_F}$ sont bien définis, et que τ_F possède les propriétés (2), (3) et (4) du théorème. □

4.3 Exemples

Donnons quelques exemples d'applications du théorème 4.10.

Corollaire 4.13 *(Hirzebruch-Riemann-Roch) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un champ propre et lisse F de $\mathcal{CH}$. Alors on a*

$$\chi(F,\mathcal{F}) = \int_F Ch(\mathcal{F}).Td(F)$$

En particulier

$$\chi(M,\mathcal{O}_M) = \int_F Td(F)$$

Preuve: On fait $F' = Speck$ dans 4.10 (1). $\square$

Comme application de cette formule, on donne plusieurs formules de type Gauss-Bonnet, calculant des caratéristiques d'Euler.

Supposons que F soit un champ de $\mathcal{CH}$, lisse et propre sur $Spec\mathbf{C}$. On applique la formule d'Hirzebruch-Riemann-Roch au complexe de De Rham de F. Pour cela, on pose pour un fibré en droite $\mathcal{L}$

$$C_1(\mathcal{L}).Td(\mathcal{L})^{-1} := 1 - Ch(\mathcal{L}^{-1})$$

Par le "splitting principle", on peut étendre cette définition à tout fibré vectoriel V, de façon à ce que si $V = \bigoplus_i \mathcal{L}_i$, on ait

$$C_{max}(V).Td(V)^{-1} = \prod_i C_1(\mathcal{L}_i).Td(\mathcal{L}_i)^{-1}$$

Remarquons alors que l'on a la formule suivante

$$Ch(\lambda_{-1}(V^\vee)) = C_{max}(V).Td(V)^{-1}$$

Corollaire 4.14 *Soit M l'espace de modules d'un champ algébrique F complexe, lisse et propre de $\mathcal{CH}$. Alors*

$$\chi(M_{top}) = \int_F C_{max}(T_F).Td(T_F)^{-1}.Td(F)$$

Dans le cas où F est un champ algébrique complexe de dimension 1, propre, lisse et génériquement non-ramifié, on peut expliciter la formule de Riemann-Roch, et retrouver la formule de Gauss-Bonnet démontrée dans [Ta, 3.2.5.2].

Corollaire 4.15 *Si F est un champ algébrique de dimension 1, lisse et propre sur $Spec\mathbf{C}$, appartennant à $\mathcal{CH}$, et tel que F soit génériquement un schéma. On* *note g le genre de l'espace de modules M, et $x_1, \dots x_r$ les points de ramification de F, d'ordres respectifs $n_1, \dots n_r$. Alors on a*

$$\int_F^{et} C_1^{et}(T_F) = 2 - 2g - \sum_{j=1}^{i=r} \frac{n_j - 1}{n_j}$$

Preuve: Soit $\zeta_j = e^{\frac{2i\pi}{n_j}} \in \mathbf{C}$. Notons $f_j : \widetilde{x_j} \to F$ le morphisme naturel. Alors $f_j^*(T_F)$ est un fibré vectoriel sur $\widetilde{x_j} \simeq B(\mathbf{Z}/n_j)$. Il s'identifie à la représentation de dimension 1 de $\mathbf{Z}/n_j$, qui à k fait correspondre la mutiplication par ζ_j^k. Ainsi, la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch appliquée à $\mathcal{O}_F$, donne

$$\frac{1}{2} \int_F^{et} C_1^{et}(T_F) = \chi(F, \mathcal{O}_F) - \sum_{j=1}^{j=r} \frac{e_j}{n_j}$$

où $e_j = \sum_{k=1}^{k=n_j-1} \frac{1}{1-\zeta^{-k}}$. Or, si on note $P_j(X) = 1 + X + \cdots + X^{n_j-1}$, on a

$$e_j = \frac{P'(1)}{P(1)} = \frac{n_j(n_j-1)}{2n_j} = \frac{n_j - 1}{2}$$

De plus, $\chi(F, \mathcal{O}_F) = \chi(M, \mathcal{O}_M) = 1 - g$. $\square$

Plus généralement, le lemme 4.12 appliqué à la projection

$$p : F \longrightarrow Spec\mathbf{C}$$

d'un champ complexe lisse et propre de $\mathcal{CH}$, et au complexe de De Rham de F, permet de retrouver la formule de "Gauss-Bonnet" ([Ta, 3.1.4.2]) générale.

Corollaire 4.16 *Soit F un champ algébrique complexe, lisse et propre de $\mathcal{CH}$. Notons*

$$M_d \hookrightarrow M_{d-1} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow M_0 = M$$

une stratification de l'espace de modules, telle que F soit une gerbe F_i sur $\widetilde{M_i} := M_i - M_{i+1}$, avec F_i irréductible. Alors

$$\int_F^{et} C_n^{et}(T_F) = \chi^{orb}(F) := \sum_i \frac{\chi((\widetilde{M_i})_{top}, \mathbf{C})}{n_i}$$

où n_i est l'ordre d'inertie de la gerbe F_i, et $n = Dim_{\mathbf{C}} F$.

Il existe encore une autre caractéristique d'Euler, "la caractéristique d'Euler des physiciens". On peut la définir pour un champ algébrique complexe F par

$$\chi^{phy}(F) := \sum_i (-1)^i Dim_{\mathbf{C}} H^i_{rep}(F)$$

où l'on utilise la cohomologie de De Rham. Cette définition est compatible avec la définition donnée dans [A-S] pour un quotient par un groupe fini.

Pour finir remarquons que le morphisme ψ défini à la fin de la preuve du théorème, reste valable si l'on suppose simplement que F vérifie 3.14. On dispose alors d'un morphisme naturel

$$\psi_F : G_*(F) \longrightarrow G_*(MI_F)$$

Soit $r : I_F \longrightarrow MI_F$ la projection. On définit $\tau^{et}_{I_F}$ par le carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
G_{0,et}(I_F)_\Lambda \arrow[r, "\tau^{et}_{I_F}"] \arrow[d, "\wr r_*"'] & H^{rep}_\bullet(F,*)_\Lambda \arrow[d, "\wr r_*"] \\
G_0(I_M)_\Lambda \arrow[r, "\tau_{I_M}"'] & H_\bullet(I_M,*)_\Lambda
\end{tikzcd}$$

où τ_{I_M} est défini dans [G3, 8.3]. Ainsi, par composition on a une transformation de Riemann-Roch

$$\tau_F = \tau^{et}_{I_F} \circ \psi_F : G_0(F)_\Lambda \longrightarrow H^{rep}_\bullet(F,*)_\Lambda$$

qui étend celle du théorème 4.10, au cas des champs algébriques ne vérifiant que 3.14.

5 Appendice

Dans cet appendice on démontre le théorème de descente. La preuve est déjà dans la preuve de [J2, Thm. $3-10$], mais le résultat n'étant pas explicité sous cette forme nous avons tenu à en donner une démonstration complète.

Pour tout l'appendice, C est un site. On utilisera les notations de la section 1, ainsi que la proposition suivante :

Proposition 5.1 *[Q2, $I-1$ Cor. 1] Soit F un préfaisceau simplicial fibrant, et $f : A \to B$ une équivalence faible. Alors le morphisme induit*

$$f^* : Hom_s(B,F) \to Hom_s(A,F)$$

est une équivalence faible.

Si $X \in C$, alors on dispose d'un foncteur image réciproque

$$j^* : SPr(C) \to SPr(C/X)$$

Ce foncteur possède un adjoint à gauche

$$j_! : SPr(C/X) \to SPr(C)$$

qui est l'extension par le préfaisceau vide. Il est défini par :

pour $F \in SPr(C/X)$ et $U \in C$, alors

$$(j_!F(U)) := \coprod_{Hom_C(U,X)} F(U \to X)$$

Il est clair que $j_!$ préserve les cofibrations ainsi que les équivalences faibles.

Lemme 5.2 *Soit C et C' deux sites et un foncteur*

$$a : SPr(C') \to SPr(C)$$

possèdant un adjoint à gauche

$$b : SPr(C) \to SPr(C')$$

qui préserve les cofibrations et les équivalences faibles, et tel que $b(*) = *$. Alors le foncteur a transforme objets fibrants en objets fibrants.

Preuve: Soit F un préfaisceau simplicial fibrant sur C', et $i : A \hookrightarrow B$ une cofibration triviale de $SPr(C)$. Il faut montrer que le morphisme induit

$$i^* : Hom(B, a(F)) \to Hom(A, a(F))$$

est surjectif. Mais par adjonction, on dispose d'un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Hom(B, a(F)) & \to & Hom(A, a(F)) \\ \wr\downarrow & & \downarrow\wr \\ Hom(b(B), F) & \to & Hom(b(B), F) \end{array}$$

Or par hypothèse $b(i) : b(A) \to b(B)$ est une cofibration triviale de $SPr(C')$, et donc le morphisme du bas est surjectif. Ce qui implique que celui du haut aussi. $\Box$

On vient de voir que si F est fibrant sur C, alors le préfaisceau j^*F (que l'on notera F_X par la suite) est fibrant sur C/X. De plus, comme j^* préserve les cofibrations triviales, on obtient une équivalence faible canonique

$$H(C/X, F_X) \stackrel{\simeq}{\to} F^\circ(X)$$

pour chaque résolution injective $F \hookrightarrow F^\circ$. De cette façon on identifiera toujours les espaces $F^\circ(X)$ et $H(C/X, F_X)$, que l'on notera $H(X, F)$.

Définition 5.3 *Un objet simplicial $X_\bullet$ de C est un foncteur*

$$X_\bullet : \Delta^{op} \to C$$

où Δ est la catégorie simpliciale standart. On notera X_m pour l'objet $X_\bullet([m])$.

Si $X_\bullet$ est un objet simplicial de C, le site induit sur $X_\bullet$ est le site suivant :

- *les objets sont les morphismes de* C

$$U \to X_m$$

pour m *un entier positif.*

- *un morphisme de* $f : U \to X_m$ *vers* $g : V \to X_n$ *est la donnée d'un morphisme* $a : [n] \to [m]$ *dans* Δ *et d'un diagramme commutatif dans* C

$$\begin{array}{ccc} U & \to & V \\ f\downarrow & & \downarrow g \\ X_m & \stackrel{X_\bullet(a)}{\to} & X_n \end{array}$$

- *un morphisme est couvrant si le morphisme induit*

$$U \to V$$

est couvrant dans C.

Ce site est noté $C/X_\bullet$

Remarquons que l'on a un foncteur de restriction

$$j^* : SPr(C) \to SPr(C/X_\bullet)$$

A travers ce foncteur, tout préfaisceau simplicial F sera aussi considéré comme préfaisceau sur $X_\bullet$. Ainsi $H(X_\bullet, F)$ désignera $H(C/X_\bullet, j^*F)$.

Soit X un objet de C et $U \to X$ un morphisme couvrant. Le nerf du recouvrement U/X est l'objet simplicial de C défini par

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \to & C \\ [m] & \mapsto & U^{(m)} = \underbrace{U \times_X U \ldots \times_X U}_{m+1\ fois} \end{array}$$

et les morphismes $U^{(m)} \to U^{(n)}$ sont induits par les projections et les diagonales. On le note $\mathcal{N}(U/X)$.

Si F est un préfaisceau simplicial et $U \to X$ un recouvrement de C, on obtient un Δ-diagramme (espace cosimplicial) d'ensembles simpliciaux

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \to & SEns \\ [m] & \mapsto & F(U^{(m)}) \end{array}$$

Rappelons que l'espace de cohomologie de $\check{C}ech$ du recouvrement U/X à coefficients dans le préfaisceau simplicial F est

$$\check{H}(U/X, F) := Holim_{[m]\in\Delta} F(U^{(m)})$$

Définition 5.4 *Un espace cosimplicial Z est un foncteur*

$$\begin{array}{rccc} Z: & \Delta & \rightarrow & SEns \\ & [m] & \mapsto & Z([m]) \end{array}$$

La catégorie des espaces cosimpliciaux est notée $CSEns$

Exemples

- $*$ est l'espace cosimplicial constant
- l'espace cosimplicial $\Delta/-$ est défini par

$$[m] \mapsto (\Delta/-)([m]) = B(\Delta/[m])$$

  où $B(I)$ est l'espace classifiant de la catégorie I, et I/i est la catégorie des morphismes de I de but i

Un espace cosimplicial Z peut être vu comme un préfaisceau simplicial sur Δ (site trivial). Ainsi, si Y et Z sont deux espaces cosimpliciaux, on définit l'espace des morphismes de Y vers Z par

$$Hom_{cs}(Y, Z) := Hom_s(Y, Z)$$

où Y et Z sont considérés comme préfaisceaux sur Δ.

Avec ces notations, la limite homotopique de Z est donnée par ([B-K, Ch. XI $3-2$])

$$Holim_{\Delta} Z = Hom_{cs}(\Delta/-, Z)$$

Théorème 5.5 *Si F est un préfaisceau simplicial sur C, et $X_\bullet$ un objet simplicial de C. Alors il existe une équivalence faible fonctorielle en F*

$$H(X_\bullet, F) \simeq Holim_{[m]\in\Delta} H(X_m, F)$$

Lemme 5.6 *Si F est un objet fibrant de $SPr(C)$, alors le préfaisceau induit F sur le site $C/X_\bullet$ est flasque.*

Preuve: Soit $j^* : SPr(C) \rightarrow SPr(C/X_\bullet)$ le morphisme de restriction. On considère $j^*F \rightarrow F^\circ$ une résolution injective sur $C/X_\bullet$. Alors, d'après le lemme 5.2, le morphisme induit sur C/X_m

$$F \rightarrow F^\circ$$

est une cofibration triviale d'objets fibrants. C'est donc une équivalence d'homotopie. Ainsi, pour tout objet U de C/X_m, le morphisme induit

$$F(U) \rightarrow F^\circ(U)$$

est une équivalence faible. Comme ceci est vrai pour tout U et tout m, on en déduit que pour tout objet U de $C/X_\bullet$

$$F(U) \to F^\circ(U)$$

est une équivalence faible. $\Box$

Lemme 5.7 *Le foncteur*

$$\begin{array}{ccc} SPr(C/X_\bullet) & \to & CSEns \\ F & \mapsto & F(X_\bullet) \end{array}$$

admet un adjoint à gauche noté $Z \mapsto \widetilde{Z}$

<u>**Preuve:**</u> Soit Z un espace cosimplicial. On définit

$$\widetilde{Z} : \begin{array}{ccc} C/X_\bullet & \to & SEns \\ (U \to X_m) & \mapsto & Z([m]) \end{array}$$

$\Box$

<u>**Preuve du théorème:**</u> Soit F un préfaisceau simplicial sur C. En remplaçant F par F° on peut supposer que F est fibrant sur C. Soit $F \hookrightarrow F^\circ$ une résolution injective sur $C/X_\bullet$. On sait que $H(X_\bullet, F) = Hom_s(*, F^\circ)$. Notons $\mathbf{1} = (\widetilde{\Delta/-})$.

Lemme 5.8 *Le morphisme canonique* $\mathbf{1} \to *$ *est une équivalence faible dans* $SPr(C/X_\bullet)$.

<u>**Preuve:**</u> Il suffit de voir que pour chaque m l'espace $\mathbf{1}(X_m)$ est contractile. Or par définition, on a

$$\mathbf{1}(X_m) = B(\Delta/[m])$$

Mais le classifiant d'une catégorie qui possède un objet final est contractile. $\Box$

Comme F° est fibrant, la proposition 5.1 montre que le morphisme naturel

$$Hom_s(*, F^\circ) \stackrel{\simeq}{\to} Hom_s(\mathbf{1}, F^\circ)$$

est une équivalence faible. Mais, par adjonction, il existe une équivalence faible fonctorielle

$$Hom_s(\mathbf{1}, F^\circ) \stackrel{\simeq}{\to} Holim_\Delta F^\circ(X_\bullet)$$

On obtient ainsi une équivalence naturelle

$$H(X_\bullet, F) \stackrel{\simeq}{\to} Holim_\Delta F^\circ(X_\bullet)$$

De plus, par le lemme 5.6, le morphisme naturel

$$F \to F^{\circ}$$

est une équivalence faible *objet par objet*. Comme les limites homotopiques préservent les équivalences faibles, le morphisme induit

$$Holim_{\Delta} F(X_{\bullet}) \to Holim_{\Delta} F^{\circ}(X_{\bullet})$$

est une équivalence faible. Enfin, comme F est fibrant, et par la remarque suivant 5.2, on obtient un diagramme fonctoriel en F

$$H(X_{\bullet}, F) \overset{\simeq}{\to} Holim_{\Delta} F^{\circ}(X_{\bullet}) \overset{\simeq}{\leftarrow} Holim_{\Delta} H(X_m, F)$$

□

Proposition 5.9 *Si F est un préfaisceau simplicial, alors le morphisme naturel*

$$H(X, F) \to H(\mathcal{N}(U/X), F)$$

est une équivalence faible

Pour cela on a besoin d'un lemme que nous ne démontrerons pas (voir [J2, Cor. $2-7$]).

Lemme 5.10 *Si F est un faisceau simplicial sur un site C, alors il existe une résolution injective $F \hookrightarrow F^{\circ}$, où F° est un faisceau d'ensembles simpliciaux.*

Preuve de la proposition: Remarquons que, si l'on note $SS(X)$ la catégorie des faisceaux simpliciaux sur le site C/X, alors on dipose d'une équivalence de catégories

$$b : SS(X) \to SS(\mathcal{N}(U/X))$$

De plus, si $F \in SS(X)$, qui est aussi fibrant comme préfaisceau simplicial, $b(F)$ est alors fibrant en tant qu'objet de $SPr(\mathcal{N}(U/X))$. En effet, notons a le foncteur de faisceautisation.

Soit $A \hookrightarrow B$ une cofibration triviale de $SPr(\mathcal{N}(U/X))$, et un diagramme commutatif sur $\mathcal{N}(U/X)$

$$\begin{array}{ccc} A & \to & b(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \to & * \end{array}$$

Comme F est un faisceau on obtient un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(B, b(F)) & \to & Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(A, b(F)) \\ \| & & \| \\ Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(a(B), b(F)) & \to & Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(a(A), b(F)) \end{array}$$

Puis, par l'équivalence de catégories $SS(X) \to SS(\mathcal{N}(U/X))$, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(B, b(F)) & \to & Hom_{\mathcal{N}(U/X)}(A, b(F)) \\
\| & & \| \\
Hom_X(a(B), F) & \to & Hom_X(a(A), F) \\
\| & & \| \\
Hom_X(B, F) & \to & Hom_X(A, F)
\end{array}$$

et le morphisme du bas est surjectif par hypothèse.

Soit F un préfaisceau simplicial sur C. Quitte à remplacer F par son faisceau associé, on peut supposer que F est un faisceau. En effet le morphisme naturel $F \to a(F)$ est une équivalence faible, donc F et $a(F)$ ont la même cohomologie.

Soit $F \hookrightarrow F^\circ$ une résolution injective dans $SPr(C)$, avec F° un faisceau. Alors

$$b(F) \to b(F^\circ)$$

est encore une résolution injective. On en déduit donc

$$H(\mathcal{N}(U/X), F) = Hom_s(*, b(F^\circ)) = Hom_s(*, F^\circ) = H(X, F)$$

□

Corollaire 5.11 *Si $U \to X$ est un recouvrement de C et F un préfaisceau simplicial, alors il existe une équivalence faible fonctorielle en F, X et U*

$$H(X, F) \stackrel{\simeq}{\to} \check{H}(U/X, H(-, F))$$

Preuve: On applique la proposition 5.9 et le théorème 5.5. □

Références

[A-S] M. Atiyah and G. Segal, "On Equivariant Euler Characteristics", J. Geom. Phys. **6** (1989), pp. $671 - 677$.

[Be] P. Berthelot, "Altération des variétés algébriques (d'après A.J. de Jong)", Séminaire Bourbaki vol. $1995 - 96$, exposé No. 815.

[B] S. Bloch, "Higher Algebraic K-theory and Algebraic Cycles", Adv. in Math. **61** (1985) pp. $267 - 304$.

[B-K] A.K. Bousfield and D.M. Kan, "Homotopy Limits, Completions and Localisations", Lecture Notes in Mathematics No. **304** , Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[D-M] P. Deligne and D. Mumford, "The Irreducibility of the Moduli Space of Curves of a Given Genus", Publ. Math. I.H.E.S. **36** (1969), pp. $75 - 110$.

[E-G] D. Edidin and W. Graham, "Equivariant Intersection Theory", Preprint.

[FL] W. Fulton and S. Lang "Riemann-Roch Algebra", a series of comprehensives studies in Mathematics **277**, Springer-Verlag (1985).

[G] H. Gillet, "Riemann-Roch Theorems for Higher Algebraic K-theory", Adv. in Math. **40** , (1981), pp. $203 - 289$.

[G2] H. Gillet, "Intersection Theory on Algebraic Stacks and Q-Varieties", J. Pure Appl. Algebra **34** (1984) pp. $193 - 240$.

[G3] H. Gillet "Homological Descent for the K-theory of coherent sheaves", in "Algebraic K-theory, Number Theory, Geometry and Analysis" Lecture Notes in Mathematics No. **1046**, Springer-Verlag (1982) pp. $80 - 103$.

[Gr] A. Grothendieck, "On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties", Publ. Math. I.H.E.S. **29** (1966) pp. $95 - 103$.

[H] R. Hartshorne, "On the De Rham Cohomology of Algebraic Varieties", Publ. Math. I.H.E.S. **45** (1975) pp. $5 - 99$.

[J] J. F. Jardine, "Generalized Etale Cohomology Theories", progress in Mathematics vol. **146**, Birkhauser (1997).

[J2] J. F. Jardine, "Simplicial Presheaves", J. Pure and Appl. Algebra J. Pure Appl. Algebra **47** (1987) pp. $35 - 87$.

[K-M] S. Keel and S. Mori, "Quotients by Groupoids", Preprint.

[Ko] B. Koeck, "The Grothendieck-Riemann-Roch Theorem for Group Scheme Action", Preprint.

[L-M] G. Laumon et Moret-Bailly, "Champs Algébriques", Prépublication d'Orsay (1992).

[Mu] D. Mumford, "Towards an Enumerative Geometry of the Moduli Space of Curves", in "Arithmetic Geometry : Papers Dedicated to I.R. Shafarevich on the Occasion of His Sixieth Birthday Vol II", progress in Mathematic vol. **36**, Birkhauser (1983) pp. $271 - 328$.

[Q] D. Quillen, Higher Algebraic K-theory I, in "Algebraic K-theory" (H. Bass Ed.), Lecture Notes in Mathematics No. **341** , Springer-Verlag 1977, pp. $85 - 147$.

[Q2] D. Quillen, "Homotopical Algebra", Lecture Notes in Mathematics No. 43, Springer-Verlag 1967.

[S] C. Simpson, "Flexible Sheaves", Preprint.

[Ta] J. Tapia, "Classes de Chern des Fibrés sur les Espaces d'Orbites", Manuscrit non publié.

[Th] R.W. Thomason, "Algebraic K-theory of Schemes and of Derived Categories", in Grothendieck Festschrift vol. III, Birkhauser 1990, pp. $247-436$.

[Th2] R.W. Thomason, "Algebraic K-theory of Group Schemes Actions", Annals of Math. Studies **113** Princeton, 1983 pp. $539 - 563$.

[Vi] A. Vistoli, "Higher Algebraic K-theory of Finite Group Actions", Duke Math. Journal No. **63** (1991) pp. $399 - 419$.

[Vi2] A. Vistoli, "Intersection Theory on Algebraic Stacks and their Moduli Spaces", Invent. Math. **97** (1989) pp. $613 - 669$.