Structures symplectiques et de Poisson sur les champs en catégories

Bertrand Toën*

May 2018

Abstract

Le but de cette courte note est de présenter deux résultats d'existence de structures symplectiques et lagrangiennes dans des cadres où les constructions de [Ca, PTVV] de type AKSZ ne sont pas applicables. Pour cela nous montrons comment les formes symplectiques se déduisent de structures de Calabi-Yau sur des (champs en) dg-catégories, ou encore d'*orientations* sur des (champs en) dg-catégories munis de structures monoïdales. Ces résultats découlent de deux théorèmes essentiels: les théorèmes de type HKR et la théorie générale des traces dans les ∞-catégories monoïdales rigides.

Contents

Introduction

Le but de cette courte note est de présenter deux résultats d'existence de formes symplectiques et de structures lagrangiennes dans le cadre dérivé. De très nombreux exemples de telles structures ont été construits à l'aide d'un formalisme de type AKSZ et de ses variantes (voir [Ca, PTVV]). Cependant, cette approche nécessite que l'on travaille avec des espaces de modules qui soient des espaces de morphismes, c'est à dire de la forme $\mathbb{R}\mathbf{Map}(X,Y)$ pour X et Y convenables. En effet, le formalisme AKSZ utilise de manière essentielle le morphisme d'évaluation $ev : \mathbb{R}\mathbf{Map}(X,Y) \times X \to Y$, afin de définir la forme symplectique par la formule $\int_X ev^*(\omega)$, où ω est une forme symplectique sur Y et $\int_X$ désigne l'intégration le long de X.

Cependant, il existe divers contextes dans les quels on souhaiterait avoir des formes symplectiques et des structures lagrangiennes naturelles, mais pour les quels on ne dispose pas de morphisme d'évaluation. Par exemple, si T est une dg-catégorie de Calabi-Yau de dimension d, il est folkloriquement admis que le

*Partially supported by ERC-2016-ADG-741501

champ $\mathcal{M}_T$ des objets dans T est muni d'une forme symplectique de degré $2-d$ (voir [To] fin du § 5.3). Il existe d'autres exemples de nature plus géométrique, comme par exemple le champ des connexions sur le disque épointés formel de [Ra, §2] (voir aussi [Pa-To] pour une généralisation), ou encore les espaces de lacets formels de [Ka-Va, He]. Un exemple plus récent et de nature analytique rigide est l'espace des modules des faisceaux ℓ-adiques de [An]. Dans ces exemples, les espaces de modules en question sont moralement des espaces de morphismes, mais sans que l'objet source X ait une réelle existence. Ainsi, la formule de type AKSZ $\int_X ev^*(\omega)$ ne possède plus de sens évident. La nature symplectique de ces espaces de modules ne peut donc pas être établie à l'aide des résultats actuellement connus.

Dans ce travail, nous tentons d'améliorer cette situation en apportant une nouvelle approche générale à l'existence de structures symplectiques. Nous démontrerons deux résultats. Un premier de nature non-commutative (voir théorème 2.5), et qui est essentiellement celui annoncé dans [To, §5.3] (fin du §5.3). Il affirme que pour une dg-catégorie de Calabi-Yau de dimension d, le champ dérivé $\mathcal{M}_T$ des objets de T est muni d'une structure symplectique de degré $2-d$ canonique. On démontre aussi une version relative pour créer des structures lagrangiennes. Un second de nature commutative (voir théorème 3.7), et qui affirme que pour une T dg-catégorie munie d'une structure tensorielle rigide, il suffit de se donner une *orientation* $or : H^*(End(1)) \to k[-d]$ afin de construire une forme symplectique de degré $2-d$ sur $\mathcal{M}_T$. Ce second résultat s'applique en particulier aux champs de connexions sur le *bord formel* d'une variété algébrique, et nous expliquerons rapidement en quoi cela est utile pour construire des structures de Poisson sur les espaces de modules de connexions (éventuellement irrégulières) sur des variétés non-compactes.

Ce travail a été motivé par des conversations avec Jorge Antonio, Tony Pantev, Marco Robalo et Jean-Baptiste Teyssier, que je remercie tous pour leurs apports.

Tout au long de cette note k désigne un anneau commutatif de caractéristique nulle.

1 Rappels sur le théorème HKR

Dans cette section nous rappelons le théorème HKR tel qu'il est énoncé dans [To-Ve]. Pour une cdga A sur k on note $\mathbf{DR}(A) := Sym_A(\mathbb{L}_{A/k}[1])$. Il s'agit d'un complexe de k-module munie d'une structure mixte donnée par la différentielle de de Rham. Ce complexe mixte donne lieu à un complexe d'homologie cyclique négative

$$NC^-(\mathbf{DR}(A)) := \mathbb{R}\underline{Hom}(k, \mathbf{DR}(A)),$$

où $\mathbb{R}\underline{Hom}$ est pris dans la théorie homotopique des complexes mixtes sur k. On dispose par ailleurs de $S^1 \otimes_k A$, qui est vu comme un complexe muni d'une action du groupe simplicial $S^1 = B\mathbb{Z}$. Cela nous donne un second complexe, des points fixes homotopiques de cette action $(S^1 \otimes_k A)^{hS^1}$. Une incarnation du théorème HKR est la proposition suivante (voir [To-Ve] par exemple).

Proposition 1.1 *On dispose d'un quasi-isomorphisme, fonctoriel en A*

$$NC^-(\mathbf{DR}(A)) \simeq (S^1 \otimes_k A)^{hS^1}.$$

L'énoncé précis est ici que les deux ∞-foncteurs $A \mapsto NC^-(\mathbf{DR}(A))$ et $A \mapsto (S^1 \otimes_k A)^{hS^1}$ sont naturellement équivalents. Noter que le membre de droite s'identifie naturellement au complexe d'homologie cyclique négative de la dg-algèbre A.

Le complexe d'homologie cyclique possède le modèle explicite usuel. On a

$$NC^{-}(\mathbf{DR}(A)) \simeq \prod_{i\geq 0} \mathbf{DR}(A)[-2i],$$

avec une différentielle somme de la différentielle cohomologique d de A et de la différentielle de de Rham dR qui envoie la composante i sur la composante $i+1$. Pour tout $p \geq 0$, ce complexe possède une projection naturelle sur sa composante "de poids p" définie comme suit. On note $\mathcal{A}^{p,cl}(A)$ le complexe des p-formes fermées sur A, au sens de [PTVV]. On rappelle qu'il s'agit du complexe $\prod_{i\geq 0} \wedge^{i+p}\mathbb{L}_A[p-i]$ muni de la différentielle totale $d+dR$. On dispose alors d'un morphisme de complexes $\pi_p : NC^{-}(\mathbf{DR}(A)) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,cl}(A)[p]$, qui consiste pour tout $i \geq 0$ à projeter la composante $\mathbf{DR}(A)[-2i]$ sur la composante $\wedge_A^{i+p}[p-i]$ (par décalage de $-2i$ de la projection canonique $\mathbf{DR}(A) \to \wedge^{i+p}\mathbb{L}_A[i+p]$).

En combinant avec la proposition précédente, on trouve pour tout $p \geq 0$ un morphisme canonique

$$\pi_p : (S^1 \otimes_k A)^{hS^1} \longrightarrow \mathcal{A}^{p,cl}(A)[p],$$

functoriel en A. Cette projection se globalise sur un champ dérivé arbitraire de la manière suivante. Soit $X \in \mathbf{dSt}_k$ un champ dérivé sur k et $\mathcal{L}X := \mathbb{R}\mathbf{Map}(S^1, X)$ le champ dérivé des lacets libres sur X. Le groupe simplicial S^1 opère sur $\mathcal{X}$ par rotation des lacets (i.e. en opérant sur lui-même par translation). Le complexe des fonctions sur $\mathcal{L}X$ est alors muni d'une action induite, et on dispose ainsi d'un complexe des fonctions S^1-équivariante $\mathcal{O}(\mathcal{L}X)^{hS^1}$. Lorsque $X = Spec\, A$ est affine, on a $\mathcal{L}X = Spec\,(S^1 \otimes A)$, et on retrouve ainsi un des complexes ci-dessus $\mathcal{O}(\mathcal{L}X)^{hS^1} \simeq (S^1 \otimes A)^{hS^1}$. Cette construction est fonctorielle en X, et l'on dispose donc d'un morphisme de descente

$$\mathcal{O}(\mathcal{L}X)^{hS^1} \longrightarrow \lim_{\mathbf{Spec}\, A \to X} (S^1 \otimes A)^{hS^1}.$$

Ce morphisme n'est en général pas une équivalence, sauf lorsque X est par exemple un schéma dérivé. Dans tous les cas, composé avec le morphisme π_p défini ci-dessus cela fournit un morphisme canonique (encore noté π_p)

$$\pi_p : \mathcal{O}(\mathcal{L}X)^{hS^1} \longrightarrow \mathcal{A}^{p,cl}(X)[p] = \lim_{\mathbf{Spec}\, A \to X} \mathcal{A}^{p,cl}(A)[p].$$

Ainsi, toute fonction S^1-équivariante f sur $\mathcal{L}X$ (de degé n) donne lieu, pour tout $p \geq 0$, à une p-forme fermée $\pi_p(f)$ (de degré $n+p$) sur X. Nous allons exploiter ce fait dans le cas particulier où $p = 2$ afin de construire des formes symplectiques.

2 Champs en dg-catégories

Dans cette section on travaille dans la théorie Morita des dg-catégories petites. Ainsi, non-seulement les dg-catégories sont supposées petites, mais de plus un morphisme Morita $T \to T'$ consiste en un bi-dg-module qui est compact à droite (voir par exemple [To]).

On travaille sur le ∞-site $(\mathbf{dAff}, et)$ des schémas dérivés affines avec la topologie étale. On rappelle qu'il existe une ∞-catégorie fibrée $\int DgCat \longrightarrow \mathbf{dAff}$ des petites dg-catégories à équivalences Morita près. Un objet de l'∞-catégorie $\int DgCat$ est une paire (A, T), qui consiste en une cdga A et une dg-categorie

A-linéaire T. Les morphismes de (A,T) vers (A',T') sont donnés par des paires (u,f), où $u: A \to A'$ est un morphisme de cdga et $f: T \longrightarrow T'$ est un morphisme dans la théorie Morita des dg-catégories sur A. On pose alors la définition suivante.

Définition 2.1 *Un* champ dérivé en dg-catégories *est la donnée d'une section de la projection* $\int DgCat \longrightarrow$ **dAff** *qui satisfait de plus à la condition de descente pour la topologie étale.*

Nous insistons sur le fait que l'on ne demande pas à ce que la section soit cartésienne. Concrêtement un champ dérivé en dg-catégories $\mathcal{T}$ consiste en la donnée suivante. Pour toute cdga A une dg-catégorie T sur A. Pour tout morphisme $u: A \to A'$ entre cdga, un morphisme Morita $f_u: T \longrightarrow T'$ de dg-catégories sur A. Des homotopie de cohérences qui assurent que f_u est fonctoriel en u.

Structures Calabi-Yau. Soit $\mathcal{T}$ un champ en dg-catégories. Il définit un complexe de $\mathcal{O}$-modules $\mathbb{HH}(\mathcal{T})$ sur le site des schémas affines dérivés, par la formule

$$\mathbb{HH}(\mathcal{T})(Spec\, A) := \mathbb{HH}(\mathcal{T}(A)/k),$$

où le membre de droite est le complexe d'homologie de Hochschild de la dg-catégorie k-linéaire $\mathcal{T}(A)$. Ce complexe de $\mathcal{O}$-modules n'est en général pas quasi-cohérent. Par ailleurs, le complexe $\mathbb{HH}(\mathcal{T})$ est muni d'une action du groupe simplicial S^1 (correspondant à l'opérateur de Connes). Enfin, comme la construction $\mathbb{HH}$ est un ∞-foncteur monoidal symmétrique, $\mathbb{HH}(\mathcal{T})$ est un module sur le faisceau de dg-algèbres $\mathbb{HH}(\mathcal{O})$. Notons, d'après le théorème HKR 1.1 que $\mathbb{HH}(\mathcal{O})$ s'identifie à $\mathbf{DR}(\mathcal{O})$, avec la différentielle de de Rham définissant l'action de S^1. Ainsi, $\mathbb{HH}(\mathcal{T})$ est un module S^1-équivariant sur $\mathbf{DR}(\mathcal{O})$.

Définition 2.2 *Une* structure de pré-Calabi-Yau de dimension d *sur un champ en dg-catégories* $\mathcal{T}$ *est la donnée d'un morphisme de* $\mathbf{DR}(\mathcal{O})$*-modules* S^1*-équivariants*

$$t: \mathbb{HH}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d].$$

La définition précédente est adaptée aux champs en dg-catégories quelconques, mais permet de retrouver la notion usuelle pour les dg-catégories sur k de la façon suivante. Toute dg-catégorie T sur k définit un champ en dg-catégories $\mathcal{T}$ par la formule $\mathcal{T}(A) := T \otimes_k A$. Dans ce cas, le $\mathbf{DR}(\mathcal{O})$-module $\mathbb{HH}(\mathcal{T})$ est libre sur $\mathbb{HH}(T/k)$

$$\mathbb{HH}(\mathcal{T}) \simeq \mathbb{HH}(T/k) \otimes_k \mathbf{DR}(\mathcal{O}).$$

Il s'en suit que la donnée d'un morphisme de $\mathbf{DR}(\mathcal{O})$-modules S^1-équivariants $t: \mathbb{HH}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d]$ comme dans la définition précédente est équivalente à la donnée d'un morphisme de complexes S^1-équivariants $t: \mathbb{HH}(T/k) \longrightarrow k[-d]$, qui retrouve la définition usuelle de structure de pré-Calabi-Yau sur une dg-catégorie T.

Toute structure de pré-Calabi-Yau $t: \mathbb{HH}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d]$ définit par changement de bases le long de l'augmentation naturelle $\mathbf{DR}(\mathcal{O}) \to \mathcal{O}$, un morphisme de $\mathcal{O}$-modules S^1-équivariants

$$t_0: \mathbb{HH}(\mathcal{T}/\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O}[-d].$$

Ici $\mathbb{HH}(\mathcal{T}/\mathcal{O})$ est la version relative d'homologie de Hochschild. En formule $\mathbb{HH}(\mathcal{T}/\mathcal{O})(A) := \mathbb{HH}(\mathcal{T}(A)/A)$ est l'homologie de Hochschild de $\mathcal{T}(A)$ vue comme dg-catégorie A-linéaire. Le morphisme t_0 induit pour toute cdga A et toute paire d'objets (x,y) dans $\mathcal{T}(A)$, un accouplement de A-modules

$$\mathcal{T}(A)(x,y) \otimes_A \mathcal{T}(A)(y,x) \longrightarrow \mathcal{T}(A)(x,x) \longrightarrow \mathbb{HH}(\mathcal{T}(A)/A) \longrightarrow A[-d].$$

Ci-dessus, le premier morphisme est la composition et le second le morphisme canonique.

Définition 2.3 *Une* structure de Calabi-Yau de dimension d *sur un champ en dg-catégories* $\mathcal{T}$ *est une structure de pré-Calabi-Yau de dimension* d

$$t : \mathbb{HH}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d],$$

telle que pour tout A *et* (x, y) *comme ci-dessus, l'accouplement*

$$\mathcal{T}(A)(x, y) \otimes_A \mathcal{T}(A)(y, x) \longrightarrow A[-d]$$

soit non-dégénéré (i.e. fait de $\mathcal{T}(A)(y, x)[d]$ *un* A*-module dual de* $\mathcal{T}(A)(x, y)$*).*

Lorsque le champ $\mathcal{T}$ est induit par une dg-catégorie T sur k, la condition de la définition précédente peut se vérifier sur le seul cas $A = k$.

Cas relatif. La notion précédente de structure de Calabi-Yau possède une version relative. On se donne maintenant un morphisme de champs en dg-catégories

$$f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'.$$

On définit l'homologie de Hochschild de f comme étant la fibre du morphisme induit $\mathbb{HH}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbb{HH}(\mathcal{T}')$. C'est un $\mathbf{DR}(\mathcal{O})$-module muni d'une action de S^1 que l'on note $\mathbb{HH}(f)$. On définit alors une structure de pré-Calabi-Yau relative de dimension d sur f comme un morphisme de $\mathbf{DR}(\mathcal{O})$-modules S^1-équivariants $t : \mathbb{HH}(f) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d]$. Un tel morphisme induit un morphisme

$$t : \mathbb{HH}(\mathcal{T}')[-1] \longrightarrow \mathbb{HH}(f) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d]$$

et donc une structure pré-Calabi-Yau de dimension $d - 1$ sur $\mathcal{T}'$. Par ailleurs, pour toute cdga A et toute paire d'objets (x, y) dans $\mathcal{T}(A)$, t induit un accouplement

$$\mathcal{T}(A)(x, y) \otimes_A \mathcal{T}(A)_f(y, x) \longrightarrow A[-d],$$

où $\mathcal{T}(A)_f(y, x)$ est la fibre de $\mathcal{T}(A)(y, x) \longrightarrow \mathcal{T}'(A)(f(x), f(y))$ (voir [To, §5.3]).

Définition 2.4 *Avec les notations ci-dessus, une* structure de Calabi-Yau relative de dimension d *sur* $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ *est une structure de pré-Calabi-Yau de dimension* d

$$t : \mathbb{HH}(f) \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d]$$

telle que pour tout A *et* (x, y) *comme ci-dessus, l'accouplement*

$$\mathcal{T}(A)(x, y) \otimes_A \mathcal{T}(A)_f(y, x) \longrightarrow A[-d]$$

est non-dégénéré (i.e. fait de $\mathcal{T}(A)_f(y, x)[d]$ *un* A*-module dual de* $\mathcal{T}(A)(x, y)$*).*

Notons que la condition ci-dessous automatiquement implique que la structure pré-Calabi-Yau de dimension $d-1$ induite sur $\mathcal{T}'$ est une structure de Calabi-Yau. En effet, le dual du morphisme $\mathcal{T}_f(A)(x,y) \to \mathcal{T}(A)(x,y)$ est équivalent au décalé par d du morphisme induit par f $\mathcal{T}_f(A)(y,x)[d] \longrightarrow \mathcal{T}(A)(y,x)[d]$. Ainsi, on trouve une dualité induite entre la cofibre du premier et la fibre du second de ces morphismes

$$\mathcal{T}'(A)(x,y) \simeq (\mathcal{T}'(A)(y,x)[d-1])^{\vee}.$$

Cette équivalence est induite par la structure de pré-Calabi-Yau de dimension $d-1$ sur $\mathcal{T}'$.

Existence de formes symplectiques et de Poisson. Nous pouvons résumer l'énoncé d'existence principal de cette section comme suit. Pour les dg-catégories définies sur k cet énoncé apparait déjà dans [To, §5.3].

À un champ en dg-catégories $\mathcal{T}$ on associe un champ dérivé $\mathcal{M}^{\mathcal{T}} \in \mathbf{dSt}_k$, qui le champ classifiant des objets de T. Pour cela on considère l'∞-foncteur $|.| : \mathbf{dgCat}_k \longrightarrow \mathbb{T}$ qui envoie une dg-catégorie T sur son espace classifiant $|T| := Map_{\mathbf{dgCat}_k}(k,T)$. On pose alors $\mathcal{M}^{\mathcal{T}} := |\mathcal{T}|$.

Theorème 2.5 *Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un morphisme de champs en dg-catégories muni d'une structure de pré-Calabi-Yau relative de dimension d.*

1. *Le champ dérivé sous-jaccent $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ est muni d'une 2-forme fermée canonique ω de degré $3-d$.*
2. *Si $u : \mathcal{M}^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ est le morphisme induit, alors on dispose d'une homotopie canonique*

$$h : u^*(\omega) \sim 0$$

entre la 2-forme fermée $u^*(\omega)$ et 0 (i.e. d'une structure isotrope sur le morphisme u).

Preuve: Tout d'abord, pour tout champ dérivé $X \in \mathbf{dSt}$ on définit $\mathcal{T}(X)$ par extension de Kan à gauche

$$\mathcal{T}(X) := \lim_{Spec\, A \to X} \mathcal{T}(A).$$

Pour un morphisme $x : X \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{T}}$, on dispose ainsi d'un objet correspondant $x \in \mathcal{T}(X)$. Appliqué à l'identité de $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}$ on trouve un objet universel $\mathcal{E} \in \mathcal{T}(\mathcal{M}^{\mathcal{T}})$.

(1) L'objet $\mathcal{E}$ possède un caractère de Chern à valeurs dans l'homologie cyclique négative de $\mathcal{T}(\mathcal{M}^{\mathcal{T}})$, ce qui fournit un élément

$$Ch(\mathcal{E}) \in HC_0^-(\mathcal{T}(\mathcal{M}^{\mathcal{T}})).$$

On utilise alors le morphisme de descente défini sur les complexes d'homologie cyclique

$$HC^-(\mathcal{T}(\mathcal{M}^{\mathcal{T}})) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}, \mathbb{HH}(\mathcal{T})^{S^1}).$$

Enfin, en composant avec la structure de pré-Calabi-Yau induite $t' : \mathbb{HH}(\mathcal{T}')[-1] \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d]$ on trouve un élément bien défini

$$\bar{\omega} \in H^0(\Gamma(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}, \mathbf{DR}(\mathcal{O})[1-d])^{S^1}).$$

Cet élément n'est pas tout à fait la 2-forme cherchée, il manque à utiliser la projection π_2 sur le complexe de poids 2 $\pi_2 : \mathbf{DR}(\mathcal{O})^{S^1} \longrightarrow \mathcal{A}^{2,cl}(\mathcal{O})[2]$, afin de trouver la 2-forme

$$\omega \in H^0(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}, \mathcal{A}^{2,cl}(\mathcal{O})[3-d]) \simeq H^{3-d}(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}, \mathcal{A}^{2,cl}(\mathcal{O})).$$

(2) Il s'agit d'un argument similaire à celui pour (1). Le morphisme f induit un morphisme sur les champs classifiants, que nous noterons $u : \mathcal{M}^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$. On dispose alors de deux dg-foncteurs

$$\mathcal{T}'(\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}) \xrightarrow{u^*} \mathcal{T}'(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}) \xleftarrow{f} \mathcal{T}(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}).$$

Les images des deux objets universels $\mathcal{E} \in \mathcal{T}(\mathcal{M}^{\mathcal{T}})$ et $\mathcal{E}' \in \mathcal{T}'(\mathcal{M}^{\mathcal{T}'})$ sont canoniquement équivalentes par ces deux dg-foncteurs. Ceci produit une homotopie entre les caractères de Chern correspondants

$$h : Ch(u^*(\mathcal{E}')) \sim Ch(f(\mathcal{E})).$$

Cette homotopie vit dans le complexe $\Gamma(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}, \mathbb{HH}(\mathcal{T}'))$, et on peut la composer avec le structure de pré-Calabi-Yau induite sur $t' : \mathbb{HH}(\mathcal{T}')[-1] \longrightarrow \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d]$ pour obtenir une homotopie dans $\Gamma(\mathcal{M}^{\mathcal{T}}, \mathbf{DR}(\mathcal{O})[1-d])^{S^1}$. Enfin, en utilisant la projection π_2 on trouve une homotopie, encore notée h dans le complexe $\mathcal{A}^{2,cl}(\mathcal{M}^{\mathcal{T}})[3-d]$ des 2-formes fermées de degré $3-d$ sur le champ $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}$. Par construction, h est une homotopie entre $\pi_2(t'(Ch(u^*(\mathcal{E}')))$ et $\pi_2(t'(Ch(f(\mathcal{E})))$. Le cocycle $\pi_2(t'(Ch(u^*(\mathcal{E}')))$ n'est autre que $u^*(\omega)$, le pull-back sur $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}$ de la 2-forme fermée ω définie sur $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ pour la structure pré-Calabi-Yau t'. Par ailleurs, par définition d'une structure pré-Calabi-Yau relative, la composée

$$\mathbb{HH}(\mathcal{T})[-1] \xrightarrow{f} \mathbb{HH}(\mathcal{T}')[-1] \xrightarrow{t'} \mathbf{DR}(\mathcal{O})[-d]$$

vient avec une homotopie naturelle à 0, ce qui implique que $t'(Ch(f(\mathcal{E}))$ possède une homotopie naturelle à 0, disons k. En composant les homotopies k et h on trouve l'homotopie cherchée

$$f^*(\omega) \sim 0$$

dans le complexe $\mathcal{A}^{2,cl}(\mathcal{M}^{\mathcal{T}})[3-d]$. $\square$

Lorsque les structures pré-Calabi-Yau du théorème 2.5 sont Calabi-Yau, alors on s'attend naturellement que la 2-forme ω soit une forme symplectique de degré $3-d$, et par ailleurs que l'homotopie de (2) définisse une structure lagrangienne sur le morphisme $u : \mathcal{M}^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$. Pour que cela ait un sens, il faut que les champs $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ soient représentables, ou au moins possèdent une théorie infinitésimale suffisamment bonne. Nous nous contenterons ici du cas représentable, et nous renvoyons le lecteur à [Pa-To] pour un cas un peu plus général (mais très utile dans certaines situations).

Corollaire 2.6 *Avec les hypothèses et notations du théorème 2.5, supposons de plus que les champs dérivés $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ soient des n-champs dérivés d'Artin (pour un certain entier n) localement de présentation finie sur k. Alors, si la structure de pré-Calabi-Yau sur f est une structure de Calabi-Yau, les deux assertions suivantes sont vraies.*

1. *La 2-forme fermée ω définie sur $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ est non-dégénérée, et ainsi définit une forme symplectique de degré $3-d$ sur $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$.*

2. *L'homotopie $h : u^*(\omega) \sim 0$ est une structure lagrangienne sur le morphisme u par rapport à la forme symplectique ω.*

Preuve: Pour un point $x : Spec\, A \to \mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$, le complexe tangent en x du champ $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ est $\mathcal{T}'(A)(E,E)[1]$, où $E \in \mathcal{T}(A)$ est l'objet correspondant à x par Yoneda. Par construction, la 2-forme sous-jacente à ω, est l'accouplement

$$\mathcal{T}'(A)(E,E)[1] \otimes_A \mathcal{T}'(A)(E,E)[1] \longrightarrow A[3-d]$$

induit par la structure de pré-Calabi-Yau t'. Comme cette structure est supposée être de Calabi-Yau, cet accouplement est non-dégénéré. Cela montre l'assertion (1), la seconde se démontre de manière analogue. $\Box$

3 Champs en dg-catégories monoïdales rigides

Dans cette seconde partie nous étudions un cadre légèrement différent que celui étudié précédemment, en supposons maintenant que les champs en dg-catégories viennent équipés de structures monoïdales symétriques rigides. Ceci amène l'avantage que la notion de structure de pré-Calabi-Yau peut être contournée et remplacée par une notion beaucoup plus simple, celle d'*orientation* (voir définition 3.3, 3.4). Ces deux notions sont très certainement liées, et il est fort probable qu'une orientation donne lieu à une structure de pré-Calabi-Yau naturelle. Nous ne tenterons pas de démontrer cela et procéderons directement afin de définir les formes fermées et le structures isotropes. Le résultat clé est ici la caractère cyclotomique des traces étudié dans [To-Ve2].

Rappelons qu'une dg-catégorie monoïdale T (sur une cdga A) est un anneau commutatif dans l'∞-catégorie $\mathbf{dgCat}_A$ des dg-catégories A-linéaires à équivalences Morita près, munie de sa structure monoïdale naturelle $\hat{\otimes}_A$ (voir par exemple [To-Ve3, §2.1]). Lorsque A varie dans l'∞-catégorie des cdga, elles s'organisent en une ∞-catégorie fibrée $\int DgCat^{\otimes} \longrightarrow \mathbf{dAff}$.

Définition 3.1 *Un* champ dérivé en dg-catégories tensorielles *est la donnée d'une section de la projection $\int DgCat^{\otimes} \longrightarrow \mathbf{dAff}$ qui satisfait de plus à la condition de descente pour la topologie étale.*

Ainsi, un champ en dg-catégories tensorielles $\mathcal{T}$ consiste en la donnée suivante. Pour toute cdga A une dg-catégorie monoïdale symétrique T sur A. Pour tout morphisme $u : A \to A'$ entre cdga, un morphisme $f_u : T \longrightarrow T'$ de dg-catégories monoïdales symétriques sur A. Des homotopie de cohérences qui assurent que f_u est fonctoriel en u.

Définition 3.2 *Un* champ en dg-catégorie rigides $\mathcal{T}$ *est un champ en dg-catégories tensorielles tel que pour toute cdga A la dg-catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{T}(A)$ est rigide.*

On rappelle qu'une dg-catégorie monoïdale T est rigide, si et seulement si sa catégorie homotopique $[T]$, qui hérite d'une structure monoïdale symétrique naturelle, est une catégorie monoïdale rigide (i.e. tout objet possède un dual, voir [To-Ve2]).

Orientations. Soit $\mathcal{T}$ un champ en dg-catégories rigides. On dispose d'un faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur **dAff**, qui à $Spec\, A$ associe $\mathcal{T}(A)(1,1)$, les endomorphismes de l'unité dans $\mathcal{T}(A)$. Nous noterons ce faisceau de $\mathcal{O}$-modules $\mathcal{H}(\mathcal{T})$. Notons que ce faisceau de $\mathcal{O}$-modules n'est pas quasi-cohérent en général.

Définition 3.3 *Soit $\mathcal{T}$ un champ en dg-catégories rigides. Une* pré-orientation de dimension d sur $\mathcal{T}$ *est la donnée d'un morphisme de $\mathcal{O}$-modules*

$$or : \mathcal{H}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{O}[-d].$$

Soit *or* une orientation de dimension d comme dans la définition ci-dessus. On dispose alors, pour toute cdga A et toute paire d'objets (x,y) dans $\mathcal{T}(A)$, d'un accouplement

$$\mathcal{T}(A)(x,y) \otimes_A \mathcal{T}(A)(y,x) \xrightarrow{comp} \mathcal{T}(A)(x,x) \xrightarrow{tr} \mathcal{T}(A)(1,1) \xrightarrow{or} A[-d].$$

Ici, *comp* est la composition des morphismes, *tr* est le morphisme trace (qui existe à l'aide de la rigidité), et *or* est le morphisme d'orientation qui nous est donné.

Définition 3.4 *Soit $\mathcal{T}$ un champ en dg-catégories rigides. Une* orientation de dimension d sur $\mathcal{T}$ *est une pré-orientation de dimension d sur $\mathcal{T}$ telle que pour toute cdga A et toute paire d'objets (x,y) comme ci-dessus, l'accouplement $\mathcal{T}(A)(x,y) \otimes_A \mathcal{T}(A)(y,x) \to A[-d]$ soit non-dégénéré.*

Comme cas particulier, nous pouvons prendre $x = y = 1$, et on voit ainsi que l'orientation définit un accouplement non-dégénéré sur la cdga $\mathcal{H}(\mathcal{T})(A)$, qui en fait une A-dg-algèbre de Poincaré de degré d.

Tout comme pour le cas des structures pré-Calabi-Yau, il existe une version relative. Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un morphisme de champs en dg-catégories rigides. Il induit un morphisme de $\mathcal{O}$-modules $f : \mathcal{H}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{T}')$. Nous noterons $\mathcal{H}(f)$ la fibre de ce morphisme.

Définition 3.5 *Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un morphisme de champs en dg-catégories rigides. Une* pré-orientation de dimension d sur f *est la donnée d'un morphisme de $\mathcal{O}$-modules*

$$or : \mathcal{H}(f) \longrightarrow \mathcal{O}[-d].$$

À une pré-orientation *or* sur f comme ci-dessus on associe une pré-orientation de dimension $d-1$ sur $\mathcal{T}'$ par composition $\mathcal{H}(\mathcal{T}')[-1] \to \mathcal{H}(f) \to \mathcal{O}[-d]$. Par ailleurs, tout comme dans le cas Calabi-Yau, *or* définit des accouplements

$$\mathcal{T}(A)(x,y) \otimes_A \mathcal{T}(A)_f(y,x) \longrightarrow A[-d],$$

où $\mathcal{T}(A)_f(y,x)$ est la fibre de $\mathcal{T}(A)(y,x) \to \mathcal{T}'(A)(f(y),f(y))$.

Définition 3.6 *Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un morphisme de champs en dg-catégories rigides. Une* orientation de dimension d sur f *est une pré-orientation de dimension d telle que pour toute cdga A et toute paire d'objets (x,y) l'accouplement ci-dessus*

$$\mathcal{T}(A)(x,y) \otimes_A \mathcal{T}(A)_f(y,x) \longrightarrow A[-d]$$

soit non-dégénéré.

Existence de formes symplectiques et de Poisson. Nous pouvons maintenant énoncer l'analogue du théorème 2.5 dans le cas rigide.

Theorème 3.7 *Soit $f : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}'$ un morphisme de champs en dg-catégories rigides muni d'un pré-orientation relative de dimension d.*

1. *Le champ dérivé sous-jaccent $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ est muni d'une 2-forme fermée canonique ω de degré $3-d$.*
2. *Si $u : \mathcal{M}^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ est le morphisme induit, alors on dispose d'une homotopie canonique*
$$h : u^*(\omega) \sim 0$$
entre la 2-forme fermée $u^*(\omega)$ et 0 (i.e. d'une structure isotrope sur le morphisme u).

Preuve: La preuve suit le même esprit que celle du théorème 2.5, mais le caractère de Chern sera remplacè par le caractère de Chern défini dans [To-Ve2] en termes de traces.

Tout d'abord, les champs en dg-catégories rigides, possèdent des champs en ∞-catégories monoïdales symétrique rigides sous-jacents. Ceux-ci sont obtenu simplement par l'∞-foncteur lax monoïdal symétrique
$$\mathbf{dgCat}_k \longrightarrow \infty - \mathbf{Cat}$$
des dg-catégories vers les ∞-catégories (qui remplace les complexes de morphismes par leur ensembles simpliciaux de Dold-Kan). Nous sommes donc dans le cadre d'application de la construction principale de [To-Ve2, Def. 4.7]. On dispose ainsi, pour tout $X \in \mathbf{dSt}_k$, d'un morphisme d'espaces
$$Ch^{tr} : \mathcal{M}^{\mathcal{T}'}(X) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}X, \mathcal{H}(\mathcal{T}'))^{hS^1}.$$
L'action de S^1 sur le membre de droite est celle induite par son action naturelle sur $\mathcal{L}X = \mathbb{R}\mathbf{Map}(S^1, X)$, et en particulier S^1 opère trivialement sur $\mathcal{H}(\mathcal{T}')$. On peut donc composer avec l'orientation induite sur $\mathcal{T}'$ pour obtenir un morphisme
$$or \circ Ch^{tr} : \mathcal{M}^{\mathcal{T}'}(X) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{L}X, \mathcal{O})[1-d]^{hS^1} \to \Gamma(X, \mathbb{HH}(\mathcal{O}))^{hS^1}.$$
Par HKR, le membre de droite est $\Gamma(X, \mathbf{DR}(\mathcal{O}))[1-d]^{hS^1}$, et l'on peut donc projeter sur la composante de poids 2. On obtient ainsi un morphisme d'espaces
$$\pi_2 \circ or \circ Ch^{tr} : \mathcal{M}^{\mathcal{T}'}(X) \longrightarrow \mathcal{A}^{2,cl}(X)[3-d].$$
On applique ce morphisme à $X = \mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$, et à l'objet universel $\mathcal{E}'$ dans $Map(X, \mathcal{M}^{\mathcal{T}'})$ (i.e. l'identité) pour obtenir une 2-forme fermée de degré $3-d$ sur $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$. C'est la forme ω du point (1). On laisse au lecteur le soin construire l'homotopie de (2) en s'inspirant de la preuve du théorème 2.5 (2). $\square$

Sous des hypothèse de représentabilité on dispose du corollaire suivant, similaire au corollaire 2.6.

Corollaire 3.8 *Avec les hypothèses et notations du théorème 3.7, supposons de plus que les champs dérivés $\mathcal{M}^{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ soient des n-champs dérivés d'Artin (pour un certain entier n) localement de présentation finie sur k. Alors, si la pré-orientation or sur f est une orientation, les deux assertions suivantes sont vraies.*

1. *La 2-forme fermée ω définie sur $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$ est non-dégénérée, et ainsi définit une forme symplectique de degré $3-d$ sur $\mathcal{M}^{\mathcal{T}'}$.*
2. *L'homotopie $h : u^*(\omega) \sim 0$ est une structure lagrangienne sur le morphisme u par rapport à la forme symplectique ω.*

4 Application: structure de Poisson sur les champs de connexions plates

La motivation principale pour le théorème 3.7 est l'étude des aspects symplectiques et de Poisson des champs de modules de connexions sur des variétés algébriques lisses mais non-propres. Le lecteur trouvera les détails de la discussion ci-dessous dans [Pa-To], nous nous contenterons ici d'esquisser très brièvement comment le théorème 3.7 s'avère utile dans ce contexte.

Pour une telle variété X sur un corps k de caractéristique nulle, on définit un champ dérivé $\mathbf{Vect}^{\nabla}(X)$ des fibrés munis de connexions plates sur X (sans aucune hypothèse de régularité à l'infini). Ce champ peut par exemple se définir par

$$\mathbf{Vect}^{\nabla}(X) := \mathbb{R}\mathbf{Map}(X_{DR}, \mathbf{Vect}),$$

le champ des morphismes de X_{DR} à valeurs dans le champ des fibrés vectoriels. Le champ $\mathbf{Vect}^{\nabla}(X)$ n'est pas représentable, mais il possède tout de même suffisamment de théorie infinitésimale pour imaginer qu'il porte une structure de Poisson canonique de degré $2-d$. En un point fermé $x \in \mathbf{Vect}^{\nabla}(X)(k)$, correspondant à un fibré plat (V, ∇), le complexe tangent de $\mathbf{Vect}^{\nabla}(X)$ est $H^*_{DR}(X, End(V))[1]$, le complexe de de Rham de X à coefficients dans les endomorphismes de V. Il existe sur ce complexe un bi-vecteur de degré $d-2$

$$p : (H^*_{DR}(X, End(V))[1])^{\vee} \longrightarrow H^*_{DR}(X, End(V))[d-1]$$

défini comme suit. Le complexe de gauche est le dual de la cohomologie de X, et donc naturellement équivalent à la cohomologie de X à coefficients à supports propres (il s'agit ici de la version algèbrique de cohomologie à supports propres)

$$(H^*_{DR}(X, End(V))[1])^{\vee} \simeq H^*_{DR,c}(X, End(V))[d-1].$$

Le morphisme p est alors le morphisme naturel $H^*_{DR,c}(X, End(V)) \to H^*_{DR}(X, End(V))$.

Moralement l'énoncé principal de [Pa-To] est que ce bi-vecteur est le bi-vecteur sous-jacent à une structure de Poisson de degré $2-d$ sur $\mathbf{Vect}^{\nabla}(X)$ au sens de [CPTVV]. Pour cela, on utilise [Me-Sa] afin de réduire la question à l'existence d'une structure lagrangienne sur un morphisme $\mathbf{Vect}^{\nabla}(X) \to M$ pour un champ dérivé symplectique convenable M. Il existe un choix canonique pour M, introduit dans [Pa-To], qui est le champ des fibrés plats sur le *bord formel de* X, champ que nous noterons $\mathbf{Vect}^{\nabla}(\hat{\partial}X)$. Le morphisme lagrangien en question $\mathbf{Vect}^{\nabla}(X) \longrightarrow \mathbf{Vect}^{\nabla}(\hat{\partial}X)$ est alors le morphisme de restriction à l'infini. Il se trouve que ce morphisme entre dans le cadre du théorème 3.7, car les fibrés à connexions forment des dg-catégories monoïdales rigides, ce qui permet d'affirmer que ce morphisme possède une structure lagrangienne canonique et donc que $\mathbf{Vect}^{\nabla}(X)$ possède une structure de Poisson naturelle.

Il faut noter ici, que le champs dérivé $\mathbf{Vect}^{\nabla}(\hat{\partial}X)$ n'est pas un champ de la forme $\mathbb{R}\mathbf{Map}$, et que l'objet $\hat{\partial}X$ n'a pas d'existence formelle. Intuitivement $\hat{\partial}X$ est le schéma formel $\hat{Y} - D$, où Y est une compactification de X, $D = Y - X$ et $\hat{Y}$ le complété formel de Y le long de D. Cet objet a été largement étudié récemment (voir [Be-Te, Ef, He-Po-Ve]), et bien qu'il n'ait pas de sens dans un cadre purement algébrique, il est possible de définir la notion de fibrés vectoriels à connexions sur $\hat{\partial}X$ et plus généralement le champ dérivé $\mathbf{Vect}^{\nabla}(\hat{\partial}X)$. L'intérêt du théorème 3.7 est alors de produire facilement une forme symplectique sur $\mathbf{Vect}^{\nabla}(\hat{\partial}X)$, dans un cadre où les résultats connus d'existence de formes symplectiques (e.g. ceux de [PTVV] ou [Ca]) ne sont pas applicables.

Pour terminer, signalons aussi que les théorèmes 2.5 et 3.7 possèdent aussi des version analytiques et analytiques rigides, grâce notamment aux résultats récents sur les théorèmes HKR (dûs à Antonio-Petit-Porta). Nous pensons par exemple que 3.7 peut être utilisé pour construire une forme symplectique sur l'espace des modules des faisceaux ℓ-adiques construit dans [An].

References

[An] Antonio, Jorge *Moduli of p-adic representations of a profinite group.* arXiv:1709.04275

[Be-Te] Ben-Bassat, Oren; Temkin, Michael *Berkovich spaces and tubular descent.* Adv. Math., **234**:217-238, 2013.

[Ca] Calaque, Damien *Lagrangian structures on mapping stacks and semi-classical TFTs.* in Stacks and categories in geometry, topology, and algebra, 1-23, Contemp. Math., **643**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.

[CPTVV] Calaque, Damien; Pantev, Tony; Toën, Bertrand; Vaquié, Michel; Vezzosi, Gabriele *Shifted Poisson structures and deformation quantization.* J. Topol. **10** (2017), no. 2, 483-584.

[Ef] Efimov, Alexander *Categorical formal punctured neighborhood of infinity, I.* Preprint arXiv:1711.00756

[He-Po-Ve] Hennion, Benjamin; Porta, Mauro; Vezzosi, Gabriele *Formal gluing along non-linear flags.* Preprint arXiv:1607.04503

[He] Hennion, Benjamin *Higher dimensional formal loop spaces.* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **50** (2017), no. 3, 609-663.

[Ka-Va] Kapranov, Mikhail; Vasserot, Eric(F-CEPO) *Vertex algebras and the formal loop space.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **100** (2004), 209-269.

[Me-Sa] Melani, Valerio; Safronov, Pavel *Derived coisotropic structures I and II.* arXiv preprints arXiv:1608.01482, arXiv:1704.03201

[PTVV] Pantev, Tony; Toën, Bertrand; Vaquié, Michel; Vezzosi, Gabriele *Shifted symplectic structures.* Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. **117** (2013), 271-328.

[Pa-To] Pantev, Tony; Toën, Bertrand *Moduli of connections on smooth varieties.* En préparation.

[Ra] Raskin, Sam *On the notion of spectral decomposition in local geometric Langlands.* arXiv:1511.01378

[To] Toën, Bertrand *Derived algebraic geometry.* EMS Surv. Math. Sci. **1** (2014), no. 2, 153-245.

[To-Va] Toën, Bertrand; Vaquié, Michel *Moduli of objects in dg- categories.* Ann. Sci. de lENS Volume **40** (2007) Issue 3, Pages 387-444.

[To-Ve] Toën, Bertrand; Vezzosi, Gabriele *Homotopical Algebraic Geometry II: geometric stacks and applications.* Mem. Amer. Math. Soc. **193** (2008), no. 902, x+224 pp.

[To-Ve] Toën, Bertrand; Vezzosi, Gabriele *Algèbres simpliciales S^1-équivariantes, théorie de de Rham et théorèmes HKR multiplicatifs.* Compos. Math. **147** (2011), no. 6, 1979-2000.

[To-Ve2] Toën, Bertrand; Vezzosi, Gabriele *Caractères de Chern, traces équivariantes et géométrie algébrique dérivée.* Selecta Math. **21** (2015), no. 2, 449-554.

[To-Ve3] Toën, Bertrand; Vezzosi, Gabriele *Trace formula for dg-categories and Bloch's conductor conjecture I.* arXiv:1710.05902

[To] Toën, Bertrand *Derived Azumaya algebras and generators for twisted derived categories.* Invent. Math. **189** (2012), no. 3, 581-652.