Dénombrabilité des classes d'équivalences dérivées de variétés algébriques

Mathieu Anel
Department of Mathematics, Middlesex College
The University of Western Ontario
London, Ontario N6A 5B7
Canada

Bertrand Toën
Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580
Université Paul Sabatier, Bat 1R2
Toulouse Cedex 09
France

July 2007

Résumé

Soient S un schéma affine, $X \longrightarrow S$ une famille miniverselle de schémas projectifs et lisses, et D une catégorie triangulée fixée. On démontre que les points $s \in S$ tels que la catégorie dérivée de la fibre en s, $D^b_{coh}(X_s)$, soit équivalente à D, forment un ensemble au plus dénombrable. Nous déduisons de cela que l'ensemble des classes d'isomorphisme des variétés complexes lisses et projectives qui possèdent une catégorie dérivée fixée est au plus dénombrable. Notre démonstration passe par la construction d'un certain préchamp classifiant les dg-catégories saturées et connexes, ainsi qu'une application des périodes allant du champ des variétés lisses et projectives vers ce préchamp, et qui à une variété associe un dg-modèle pour sa catégorie dérivée.

Table des matières

Introduction

À toute variété algébrique projective et lisse X (disons sur un corps k) on peut associer $D^b_{coh}(X)$, sa catégorie dérivée cohérente bornée. Pour deux telles variétés X et Y à fibrés canoniques (ou anti-canoniques) amples, on sait que X et Y sont isomorphes si et seulement si les catégories $D^b_{coh}(X)$ et $D^b_{coh}(Y)$ sont équivalentes en tant que catégories triangulées (voir [Bo-Or]). Cependant, il existe en général des exemples où X et Y ne sont pas isomorphes mais où les catégories dérivées $D^b_{coh}(X)$ et $D^b_{coh}(Y)$ sont équivalentes (voir [Ro] pour des références). Cela pose évidemment la question de la classification des variétés projectives et lisses X qui possèdent une catégorie dérivée fixée (à équivalence triangulée près). Dans cette direction Y. Kawamata propose la conjecture suivante (voir [Ro] pour une discussion de cette conjecture).

Conjecture 0.1 *Soit D une catégorie triangulée k-linéaire. Alors, l'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés projectives et lisses X sur k telles que $D^b_{coh}(X)$ soit équivalente à D (en tant que catégorie k-linéaire triangulée) est fini.*

L'objet de ce travail est de proposer une approche géométrique de cette conjecture qui utilise un certain *espace de modules de catégories triangulées*. L'idée générale, et naïve, est de chercher à construire un tel espace de modules $\mathcal{M}$ qui paramétrise les catégories triangulées, ainsi qu'une certaine *application des périodes*

$$\Pi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{M},$$

où $\mathcal{V}$ est un espace de modules pour les variétés projectives et lisses, et où Π envoie X sur $D^b_{coh}(X)$. On cherchera alors à montrer que Π est infinitésimalement injective (i.e. non-ramifiée), et donc à fibres discrètes. Dans le cas où ces espaces de modules sont assez proches d'être des variétés algébriques ses fibres seraient donc finies. Cela impliquerait 0.1 car la fibre de Π pris au point D est précisément l'ensemble dont la conjecture 0.1 prédit la finitude.

Dans ce travail nous construisons des modèles aux espaces $\mathcal{V}$ et $\mathcal{M}$ et au morphisme Π, et nous montrons que Π est non-ramifié en un certain sens. Avant de passer aux détails techniques des définitions de ces objets signalons qu'une conséquence de leurs existences est le théorème suivant, qui est l'énoncé principal de cet article.

Théorème 0.2 *(Cor. 6.4) Soit $X \longrightarrow S$ une famille miniverselle de schémas projectifs, lisses et géométriquement connexes, avec S un schéma de type fini sur un corps k. Soit D une catégorie triangulée k-linéaire, et $S(D)$ le sous-ensemble de $S(k)$ formé des points s tels que $D^b_{coh}(X_s)$ soit équivalente à D (comme catégorie triangulée k-linéaire). Alors $S(D)$ est un ensemble au plus dénombrable.*

Il faut noter que la conjecture 0.1 implique l'énoncé précédent (voir notre remarque au §8).

Bien que 0.2 est relativement loin de la conjecture 0.1, il affirme qu'elle est *moralement* vraie si l'on remplace *fini* par *au plus dénombrable* ("moralement" car on ne considère ici que des variétés qui apparaissent dans une même famille miniverselle). De plus, dans le cas des variétés algébriques complexes un argument transcendant permet de déduire la dénombrabilité des classes d'équivalences dérivées.

Théorème 0.3 *(Cor. 7.1) Soit D une catégorie triangulée $\mathbb{C}$-linéaire. Alors, l'ensemble des classes d'isomorphismes de variétés complexes lisses et projectives X telles que $D^b_{coh}(X)$ soit équivalente (comme catégorie triangulée $\mathbb{C}$-linéaire) à D est au plus dénombrable.*

Quelques mots sur le contenu de cet article. Le lecteur ne sera pas surpris d'apprendre que nous avons chercher des modèles pour $\mathcal{V}$, $\mathcal{M}$ et Π dans le cadre des champs. Il le sera peut-être un peu d'apprendre que les modèles que nous construisons de ces objets ne sont *pas* des champs algébriques, et de plus que le modèle que nous donnons pour $\mathcal{M}$ est un préchamp qui n'est même pas un champ. Plus précisément, pour $\mathcal{V}$ on prendra, comme on peut s'y attendre, le champ $\mathcal{VAR}^c_{smpr}$ des schémas propres, lisses et géométriquement connexes (dont les sections au-dessus d'un schéma S est le groupoïde des morphismes $X \longrightarrow S$ propres, lisses et à fibres géométriquement connexes). Il est bien connu que ce champ n'est pas algébrique, car il existe des déformations formelles dans $\mathcal{VAR}^c_{smpr}$ qui ne sont pas algébrisables. Comme modèle pour l'objet $\mathcal{M}$ nous proposons le préchamp $\mathcal{DGC}^c_{sat}$ qui paramétrise les *dg-catégories saturées et connexes, prises à quasi-équivalence près*[1] (voir §2,3 pour plus de détails). Le préchamp $\mathcal{DGC}^c_{sat}$ n'est pas un champ, et ses préfaisceaux de morphismes ne sont pas non plus des faisceaux (il s'agit donc d'un préchamp en un sens encore plus faible que celui de [L-M]). Il n'est donc pas algébrique, et son champ associé ne l'est probablement pas non plus, et ce pour la même raison que pour le cas de $\mathcal{VAR}^c_{smpr}$ (à savoir l'existence de déformations formelles non algébrisables, voir notre remarque au §8). Enfin, nous construisons un morphisme de préchamps

$$\Pi : \mathcal{VAR}^c_{smpr} \longrightarrow \mathcal{DGC}^c_{sat},$$

qui à un schéma propre et lisse $X \longrightarrow S = Spec\, k$ associe une dg-catégorie $L_{pe}(X)$ de complexes parfaits sur X, qui est un dg-modèle à la catégorie dérivée parfaite $D_{parf}(X)$. Le fait que $X \mapsto L_{pe}(X)$ soit compatible aux changements de bases $k \to k'$, et donc le fait que Π existe

[1] Il est bien connu que la notion de catégorie triangulée possède beaucoup de désavantages qui sont résolus en la remplaçant par la notion de dg-catégorie. C'est seulement au prix de ce remplacement que l'objet $\mathcal{DGC}^c_{sat}$ peut-être défini et possède une chance de bien se comporter.

comme morphisme de préchamps, est une propriété spécifique à l'utilisation des dg-catégories qui ne serait pas vérifiée si l'on avait chercher à définir $\mathcal{DGC}_{sat}^{c}$ à l'aide de catégories triangulées.

Nous montrerons alors que le morphisme Π est non-ramifié, au sens où une déformation infinitésimale dans $\mathcal{VAR}_{smpr}^{c}$ est triviale si et seulement si son image dans $\mathcal{DGC}_{sat}^{c}$ l'est (voir Prop. 5.1). Cela peut sembler de peu d'intérêt étant donné que les préchamps $\mathcal{VAR}_{smpr}^{c}$ et $\mathcal{DGC}_{sat}^{c}$ ne sont pas des champs algébriques. Cependant, ces deux objets partagent une propriété en commun avec les champs algébriques qui permet de tirer des conséquences intéressantes de l'existence de Π et de son caractère non ramifié. Cette propriété est la *quasi-représentabilité*, ou en d'autres termes la représentabilité du morphisme diagonal. Pour $\mathcal{VAR}_{smpr}^{c}$ la quasi-représentabilité est une conséquence de l'existence des espaces algébriques de Hilbert, et est donc bien connue. La quasi-représentabilité de $\mathcal{DGC}_{sat}^{c}$ (tout au moins à un procédé de faisceautisation près) est elle une conséquence des résultats de [To-Va] qui affirment l'existence d'un champ algébrique classifiant les objets d'une dg-catégorie saturée (voir Prop. 3.1). On montre aussi que la diagonale de $\mathcal{DGC}_{sat}^{c}$ possède une propriété de *quasi-compacité dénombrable*, qui affirme que l'intersection de deux affines au-dessus de $\mathcal{DGC}_{sat}^{c}$ possède un recouvrement par un nombre dénombrable de schémas affines (voir Prop. 3.1). Le théorème 0.2 est alors une conséquence formelle du caractère non ramifié de Π, de la quasi-représentabilité de $\mathcal{DGC}_{sat}^{c}$, de la propriété de quasi-compacité dénombrable, et d'un théorème de D. Orlov affirmant que deux variétés lisses et projectives possèdent des catégories dérivées équivalentes si et seulement leur dg-modèles sont quasi-équivalents (voir [Or]). Au passage, nous démontrons une version plus générale du théorème 0.2, valable pour les familles propres et lisses, mais pour laquelle la notion de catégorie triangulée doit être remplacée par celle de dg-catégorie.

Remerciements: Nous remercions B. Keller et G. Vezzosi pour plusieurs discussion sur la théorie des déformations des dg-catégories qui ont influencé ce travail (bien que cette théorie des déformation ait pu être soigneusement évitée). Un grand merci à C. Simpson pour nous avoir expliqué comment le théorème 0.3 découlait du théorème 0.2. Nous remercions enfin J. Lurie pour sa remarque sur la non représentabilité du champ des dg-catégories saturées, et C. Voisin pour ses commentaires.

Conventions et notations: Nous notons $CAlg$ la catégorie des anneaux commutatifs. Pour $k \in CAlg$, nous notons $k - CAlg$ celle des k-algèbres commutatives. Lorsque nous considérerons des faisceaux ou bien des champs, la catégorie Aff des schémas affines sera munie de la topologie étale. Le produit fibré homotopique de préchamps, aussi appelé *2-produit fibré*, sera noté $- \times^{h}_{-} -$. Enfin, on renvoie à [Ke, To1, To2, To-Va] pour des rappels sur le "monde dégé" (dg-algèbres, dg-catégories, dg-modules, dg-modules parfaits ...).

1 Dg-catégories saturées et connexes

Dans ce paragraphe nous rappellerons brièvement les notions de dg-catégories propres, lisses, triangulées et saturées. On renvoie à [Ke, To-Va] pour des définitions plus détaillées.

Fixons un anneau commutatif de base k. Une dg-catégorie (sur k) est une catégorie enrichie dans la catégorie monoïdale des complexes (non bornés) de k-modules. À une telle dg-catégorie T on associe une catégorie homotopique $[T]$, dont les objets sont les mêmes que ceux de T et dont les ensembles de morphismes sont les H^0 des complexes de morphismes de T. Il existe une notion naturelle de morphisme de dg-catégories qui est celle de foncteur enrichi. Un tel foncteur, $T \longrightarrow T'$, est une *quasi-équivalence* s'il induit des quasi-isomorphismes au niveau des complexes de morphismes et s'il induit un foncteur essentiellement surjectif $[T] \longrightarrow [T']$. On s'intéressera particulièrement à la catégorie homotopique des dg-catégories (au-dessus de k), notée $Ho(k-dg-cat)$, obtenu en localisant celle des dg-catégories le long des quasi-équivalences (voir [Tab] pour une justification de l'existence raisonable d'une telle localisation).

Pour une dg-catégorie T, on dispose d'une catégorie de T^{op}-dg-modules $T^{op} - Mod$, et de sa catégorie homotopique $D(T^{op}) := Ho(T^{op} - Mod)$. La catégorie $D(T^{op})$ est naturellement munie d'une structure triangulée. Le plongement de Yoneda enrichi permet de construire un foncteur pleinement fidèle

$$[T] \longrightarrow D(T^{op}).$$

Nous dirons alors que T est *triangulée* si l'image essentielle de ce foncteur consiste en la sous-catégorie $D(T^{op})_c$ des objets compacts dans $D(T^{op})$.

Nous dirons qu'une dg-catégorie T est *compactement engendrée* s'il existe une dg-algèbre B sur k, et une équivalence de catégories triangulée $D(T^{op}) \simeq D(B)$. De manière équivalente, T est compactement engendrée si la catégorie triangulée $D(T^{op})$ possède un générateur compact. Nous dirons que T est *localement propre* si pour toute paire d'objets (x, y) dans T, le complexe $T(x, y)$ est un complexe parfait de k-modules. Nous dirons alors que T est *propre* si elle est compactement engendrée et localement propre. De manière équivalente T est propre si elle est Morita équivalente (au sens dérivée) à une dg-algèbre B dont le complexe sous-jacent est un complexe parfait de k-modules.

Pour deux dg-catégories T et T' on peut définir leur produit tensoriel $T \otimes T'$ (sur k), dont l'ensemble d'objets est le produit des ensembles d'objets de T et T', et dont les complexes de morphismes sont les produits tensoriels des complexes de morphismes de T et T'. Cette construction peut se dériver à gauche pour donner un produit tensoriel dérivé $T \otimes^{\mathbb{L}} T'$. Ce produit tensoriel dérivé munit $Ho(k - dg - cat)$ d'une structure monoïdale symétrique que l'on montre être fermée (voir [To1]).

Une dg-catégorie T définit un $T \otimes T^{op}$-module, qui envoie une paire d'objets (x, y) sur le complexe $T(y, x)$, et donc un objet dans $D(T \otimes^{\mathbb{L}} T^{op})$. Nous dirons que T est *lisse* si l'objet T est compact dans $D(T \otimes^{\mathbb{L}} T^{op})$.

Nous pouvons enfin donner la définition de dg-catégorie saturée.

Définition 1.1 *Une dg-catégorie T au-dessus de k est* saturée*, si elle est propre, lisse et triangulée.*

Pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $k \longrightarrow k'$ il existe un foncteur de changement de bases

$$- \otimes_k^{\mathbb{L}} k' : Ho(k-dg-cat) \longrightarrow Ho(k'-dg-cat),$$

qui est adjoint à gauche du foncteur d'oubli. On remarque alors que les dg-catégories propres et lisses sont stables par changement de bases. Les dg-catégories triangulées, et donc saturées, ne le sont pas. Cependant, le foncteur d'inclusion $Ho(k-dg-cat^{tr}) \hookrightarrow Ho(k-dg-cat)$ des dg-catégories triangulées dans les dg-catégories possède un adjoint à gauche $T \mapsto \widehat{T}_{pe}$ (voir [To1, §7]). On peut donc définir un foncteur de changement de bases pour les dg-catégories triangulées par

$$\begin{array}{ccc} Ho(k-dg-cat^{tr}) & \longrightarrow & Ho(k'-dg-cat^{tr}) \\ T & \longmapsto & (\widehat{T \otimes_k^{\mathbb{L}} k'})_{pe}. \end{array}$$

Ce dernier changement de bases préserve alors les dg-catégories saturées (on utilisera ici les résultats de [To-Va, Lem. 2.6] qui affirment qu'être propre et lisse est invariant par la construction $T \mapsto \widehat{T}_{pe}$).

Pour terminer signalons que la sous-catégorie pleine $Ho(k-dg-alg^{sat}) \subset Ho(k-dg-cat)$, formée des dg-catégories saturées, possède la description suivante. On considère les dg-algèbres A sur k qui sont propres et lisses (i.e. parfaites comme k-dg-modules et comme $A \otimes^{\mathbb{L}} A^{op}$-dg-module). Pour deux telles dg-algèbres A et B on note $Mor(A, B)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets compacts dans la catégorie triangulée $D(A \otimes^{\mathbb{L}} B^{op})$. Pour trois dg-algèbres propres et lisses A, B et C on dispose d'un morphisme de composition

$$Mor(A, B) \times Mor(B, C) \longrightarrow Mor(A, C),$$

qui à $M \in D(A \otimes^{\mathbb{L}} B^{op})$ et $N \in D(B \otimes^{\mathbb{L}} C^{op})$ associe

$$M \otimes_B^{\mathbb{L}} N \in D(A \otimes^{\mathbb{L}} C^{op}).$$

Ceci fait des dg-algèbres propres et lisses une catégorie noté $Ho(k-dg-alg^{pl}_{mor})$. Les théorèmes de [To1] montrent alors qu'il existe une équivalence de catégories

$$Ho(k-dg-alg^{pl}_{mor}) \simeq Ho(k-dg-cat^{sat}).$$

Le foncteur qui induit cette équivalence envoie une dg-algèbre propre et lisse A sur la dg-catégorie $\widehat{A}_{pe}$, des A^{op}-dg-modules compacts.

2 Le préchamp $\mathcal{DGC}^c_{sat}$

Soient k un anneau commutatif et $T \in Ho(k-dg-cat)$ une dg-catégorie. On définit la cohomologie de Hochschild de T par la formule suivante (voir [To1, §8.1])

$$HH^i_k(T) := Ext^i_{T \otimes_k^{\mathbb{L}} T^{op}}(T, T),$$

où les groupes Ext^i sont calculés dans la catégorie triangulée $D(T \otimes_k^{\mathbb{L}} T^{op})$. Comme il se doit $HH_k^*(T)$ est munie d'une structure naturelle de k-algèbre graduée. On dispose donc d'un morphisme naturel $k \longrightarrow HH^0(T)$.

Notons au passage que si A est une dg-algèbre et $T := \widehat{A}_{pe}$ est sa dg-catégorie des A-dg-modules compacts, alors $HH^*(T)$ est naturellement isomorphe à $HH^*(A)$ défini à l'aide du complexe de Hochschild usuel (voir par exemple [Ke]).

Définition 2.1 *Nous dirons qu'une k-dg-catégorie T est* connexe *si pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $k \longrightarrow k'$ les deux conditions suivantes sont satisfaites*

1. $$HH_{k'}^i(T \otimes_k^{\mathbb{L}} k') \simeq 0 \quad \forall\, i < 0.$$

2. *Le morphisme naturel*
$$k' \longrightarrow HH_{k'}^0(T \otimes_k^{\mathbb{L}} k')$$
est un isomorphisme.

Pour tout anneau commutatif $k \in CAlg$ notons $\mathcal{DGC}_{sat}^c(k)$ le groupoïde des dg-catégories saturées et connexes dans $Ho(k - dg - cat)$. Pour un morphisme $k \to k'$ dans $CAlg$ on a vu que l'on disposait de foncteur de changement de bases $(\widehat{(-) \otimes_k^{\mathbb{L}} k'})_{pe}$ qui préservaient les dg-catégories saturées, et donc de foncteurs naturels

$$(\widehat{(-) \otimes_k^{\mathbb{L}} k'})_{pe} : \mathcal{DGC}_{sat}^c(k) \longrightarrow \mathcal{DGC}_{sat}^c(k').$$

Ces changements de bases préservent les dg-catégories saturées et connexes, et on a donc défini un préchamp $\mathcal{DGC}_{sat}^c$ sur le site des schémas affines.

Définition 2.2 *Le* préchamp des dg-catégories saturées et connexes *est le préchamp $\mathcal{DGC}_{sat}^c$ défini ci-dessus.*

Il se trouve que le préchamp $\mathcal{DGC}_{sat}^c$ n'est pas un champ (disons pour la topologie étale). Une première raison est que les préfaisceaux d'isomorphismes entre deux objets ne sont pas des faisceaux. En effet, ces préfaisceaux sont les préfaisceaux des classes d'isomorphismes d'une $\mathbb{G}_m$-gerbe (voir ci-dessous pour plus de détails) et ne sont donc en général pas des faisceaux. Cela provient en réalité du fait que $\mathcal{DGC}_{sat}^c$ a été défini comme le 1-tronqué d'un 2-préchamp dont les 1-préchamps d'isomorphismes sont eux des 1-champs (voir §7 et [To3, §4.3 (6)] pour des remarques sur l'aspect champs supérieurs). Mais de plus, les données de descente ne sont pas effectives dans $\mathcal{DGC}_{sat}^c$, même après que les préfaisceaux d'isomorphismes aient été remplacés par des faisceaux, où même si $\mathcal{DGC}_{sat}^c$ est remplacé par le 2-préchamp sus-cité. Cela est dû au fait qu'il existe des formes tordues non triviales de dg-catégories pour la topologie étale.

3 Quasi-représentabilité de $\mathcal{DGC}^c_{sat}$

Nous avons défini un préchamp $\mathcal{DGC}^c_{sat}$ que nous avons vu ne pas être un champ. Il se trouve que le champ associé à $\mathcal{DGC}^c_{sat}$ n'est pas un champ algébrique (voir notre remarque au §8). Nous montrons cependant dans la proposition suivante que son morphisme diagonal est représentable.

Proposition 3.1 *Pour tout schéma affine $X \in Aff$, et toute paire de morphismes de préchamps $s, t : X \longrightarrow \mathcal{DGC}^c_{sat}$, le faisceau $a(\underline{Iso}(s,t))$, associé au préfaisceau*

$$\underline{Iso}(s,t) := \mathcal{DGC}^c_{sat} \times^h_{(\mathcal{DGC}^c_{sat} \times \mathcal{DGC}^c_{sat})} X,$$

est représentable par un espace algébrique localement de présentation finie (sur X). De plus, l'espace algébrique $a(\underline{Iso}(s,t))$ est une réunion dénombrable de sous-espaces algébriques ouverts et de présentation finie (sur X).

Preuve: Soit $X = Spec\, k \in Aff$, et $s, t : X \longrightarrow \mathcal{DGC}^c_{sat}$ deux morphismes de préchamps. Les morphismes s et t correspondent à deux objets de $\mathcal{DGC}^c_{sat}(k)$, c'est à dire à deux dg-catégories T_1 et T_2 saturées et connexes. Le préfaisceaux $\underline{Iso}(s,t)$ se décrit par le foncteur $k - CAlg \longrightarrow Ens$, qui envoie une k-algèbre commutative k' sur l'ensemble des isomorphismes $T_1 \otimes^{\mathbb{L}}_k k' \simeq T_2 \otimes^{\mathbb{L}}_k k'$ dans $Ho(k' - dg - cat)$. D'après les théorèmes de [To1] le préfaisceau $\underline{Iso}(s,t)$ est isomorphe au préfaisceau qui à $k' \in k-CAlg$ associe l'ensembles des classes d'isomorphismes d'objets compacts et inversibles (pour la composition des morphismes de Morita) dans $D(T_1 \otimes^{\mathbb{L}}_k T_2^{op} \otimes^{\mathbb{L}}_k k')$.

On pose $T_0 := T_1 \otimes^{\mathbb{L}}_k T_2^{op}$, qui est une k-dg-catégorie propre et lisse (mais pas triangulée en général). D'après [To-Va], il existe un (1-)champ algébrique $t_{\leq 0}\mathcal{M}^{simp}_{T_0^{op}}$, localement de présentation finie au-dessus de $Spec\, k$, qui à $k' \in A - CAlg$ associe le groupoïde des objets compacts $E \in D(T_0 \otimes^{\mathbb{L}}_k k')$ tels que $Ext^i(E,E) = 0$ pour $i < 0$ et $Ext^0(E,E) = k'$. De plus, ce champ algébrique est une $\mathbb{G}_m$-gerbe au-dessus de son espace de modules $M := \pi_0(t_{\leq 0}\mathcal{M}^{simp}_{T_0^{op}})$. En d'autres termes, l'espace algébrique M représente le faisceau associé au préfaisceau qui à $k' \in A-CAlg$ associe l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets compacts $E \in D(T_0 \otimes^{\mathbb{L}}_k k')$ tels que $Ext^i(E,E) = 0$ pour $i < 0$ et $Ext^0(E,E) = k'$.

Lemme 3.2 *Avec les notations ci-dessus, si $E \in D((T_1 \otimes^{\mathbb{L}}_k T_2^{op}) \otimes^{\mathbb{L}}_k k')$ est inversible, alors on a*

$$Ext^i(E,E) = 0 \;\forall\, i < 0 \qquad Ext^0(E,E) = k'.$$

Preuve: De deux choses l'une: ou bien T_1 et T_2 deviennent isomorphes dans le groupoïde $\mathcal{DGC}^c_{sat}(k')$, ou bien elles ne le sont pas. Dans le second cas aucun objet $E \in D((T_1 \otimes^{\mathbb{L}}_k T_2^{op}) \otimes^{\mathbb{L}}_k k')$ n'est inversible. Supposons alors que l'on soit dans le premier cas. Nous pouvons donc supposer que $T_1 = T_2 = T$. Soit $E \in D((T \otimes^{\mathbb{L}}_k T^{op}) \otimes^{\mathbb{L}}_k k')$ un objet inversible. En multipliant par l'inverse de E, on trouve une auto-équivalence triangulée de $D((T \otimes^{\mathbb{L}}_k T^{op}) \otimes^{\mathbb{L}}_k k')$ qui envoie E sur $T \otimes^{\mathbb{L}}_k k'$. On a donc

$$Ext^i(E,E) \simeq Ext^i(T \otimes^{\mathbb{L}}_k k', T \otimes^{\mathbb{L}}_k k') \simeq HH^i(T \otimes^{\mathbb{L}}_k k').$$

Ainsi, la condition de connexité sur T implique le lemme. $\square$

Le lemme précédent montre que le faisceau $a(\underline{Iso}(s,t))$, associé à $\underline{Iso}(s,t)$, s'identifie naturellement au sous-faisceau de M formé des objets inversibles. Or, être inversible est une condition ouverte au sens de Zariski (e.g. voir la preuve de [To-Va, Cor. 3.24]), et ainsi $a(\underline{Iso}(s,t))$ est bien représentable par un espace algébrique localement de présentation finie sur $Spec\, k$.

Finalement, on sait que le champ $t_{\leq 0}\mathcal{M}^{simp}_{T_0^{op}}$ est une réunion dénombrable de sous-champs ouverts et de présentation finie sur $Spec\, k$ (voir [To-Va, §3.3]). Comme l'inclusion $a(\underline{Iso}(s,t)) \longrightarrow M$ est une immersion ouverte on en déduit aisément que $a(\underline{Iso}(s,t))$ est encore une réunion dénombrable de sous-espaces algébriques ouverts et de présentation finie sur $Spec\, k$. $\square$

Corollaire 3.3 *Pour tout schémas affines $X, Y \in Aff$, et tout morphismes*

$$s : X \longrightarrow \mathcal{DGC}^c_{sat} \qquad t : Y \longrightarrow \mathcal{DGC}^c_{sat},$$

le faisceau $a(\underline{Iso}(s,t))$, associé au préfaisceau

$$\underline{Iso}(s,t) := X \times^h_{\mathcal{DGC}^c_{sat}} Y,$$

est représentable par un espace algébrique localement de type fini (sur $X \times Y$). De plus, l'espace algébrique $a(\underline{Iso}(s,t))$ est une réunion dénombrable de sous-espaces algébriques ouverts et de présentation finie (sur $X \times Y$).

Preuve: On applique la proposition 3.1 au morphisme $X \times Y \longrightarrow \mathcal{DGC}^c_{sat} \times \mathcal{DGC}^c_{sat}$. $\square$

4 Application des périodes

Notons $\mathcal{VAR}^c_{smpr}$ le champ qui à $k \in CAlg$ associe le groupoïde des schémas $X \longrightarrow Spec\, k$, propres, lisses et à fibres géométriquement connexes. Pour $X \longrightarrow Spec\, k$ un objet de $\mathcal{VAR}^c_{smpr}$ on peut considérer sa dg-catégorie (sur k) des complexes parfaits $L_{pe}(X)$, qui est un dg-modèle à la catégorie triangulée $D_{parf}(X)$ (i.e. il existe une équivalence triangulée naturelle $[L_{pe}(X)] \simeq D_{parf}(X)$, voir [To1, §8.3]). On montre de plus que $L_{pe}(X)$ est saturée (voir [To-Va, Lem. 3.27]). On montre aussi que $L_{pe}(X)$ est connexe car on a

$$\widehat{L_{pe}(X) \otimes^{\mathbb{L}}_k k'}_{pe} \simeq L_{pe}(X \otimes_k k')$$

$$HH^i(L_{pe}(X)) \simeq Ext^i(\Delta_X, \Delta_X),$$

où Δ_X est le faisceau structural de la diagonale et où le groupe Ext est pris dans $D_{parf}(X \times_k X)$. On définit ainsi un morphisme de préchamps

$$\Pi : \mathcal{VAR}^c_{smpr} \longrightarrow \mathcal{DGC}^c_{sat}.$$

Définition 4.1 *Le morphisme de champs Π défini ci-dessus est appelé* application des périodes.

5 Un énoncé de type Torelli infinitésimal

Soit K un corps algébriquement clos, F un préchamp et $x \in F(K)$ un point. On rappelle que le groupoïde tangent de F en x, noté T_xF est défini comme la fibre homotopique du morphisme naturel $F(K[\epsilon]) \longrightarrow F(K)$ prise au point x. En d'autres termes

$$T_xF := F(K[\epsilon]) \times^h_{F(K)} \{x\}.$$

L'ensemble des classes d'isomorphismes du groupoïde T_xF sera appelé *l'espace tangent de F en x* et sera noté

$$T^0_xF := \pi_0(T_xF).$$

L'espace tangent T^0_xF est en général un ensemble pointé, dont le point de base sera noté 0 et correspond à l'image de x par le morphisme naturel $F(K) \longrightarrow F(K[\epsilon])$.

La proposition suivante affirme que l'application des périodes Π satisfait une propriété de type *Torelli infinitésimal*.

Proposition 5.1 *Soit K un corps algébriquement clos et $X \in \mathcal{VAR}^c_{smpr}(K)$ d'image $\Pi(X) \in \mathcal{DGC}^c_{sat}(K)$. Alors le morphisme induit*

$$T\Pi : T^0_X\mathcal{VAR}^c_{smpr} \longrightarrow T^0_{\Pi(X)}\mathcal{DGC}^c_{sat}$$

est tel que

$$T\Pi^{-1}(0) = \{0\}.$$

Preuve: Soit $u \in T^0_X\mathcal{VAR}^c_{smpr}$, correspondant à une déformation infinitésimale (X', α) de X. Dans cette notation $X' \longrightarrow Spec\, K[\epsilon]$ est un schéma propre et lisse et $\alpha : X \longrightarrow X'$ est un morphisme de $K[\epsilon]$-schémas induisant un isomorphisme $\alpha_0 : X \simeq X' \otimes_{K[\epsilon]} K$. Son image par $T\Pi$ est la déformation infinitésimale $(L_{pe}(X'), \gamma(\alpha))$ de $L_{pe}(X)$, où $\gamma(\alpha) \in D(X \times_{K[\epsilon]} X')$ est le faisceau structural du graphe du morphisme α, considéré comme un isomorphisme

$$\gamma(\alpha) : L_{pe}(X) \simeq (L_{pe}(\widehat{X') \otimes_{K[\epsilon]}} K)_{pe}$$

dans $Ho(K - dg - cat)$ (voir [To1, Thm. 8.15]). Supposons que $T\Pi(X, \alpha) = 0$. En utilisant [To1, Thm. 8.15] on voit que cela implique qu'il existe un objet

$$E \in D_{parf}(X' \times_K X) \simeq D_{parf}(X' \times_{K[\epsilon]} (X \otimes_K K[\epsilon])),$$

satisfaisant aux deux conditions suivantes.

- La transformation de Fourier-Mukai associée à E

  $$\phi_E : D(X') \longrightarrow D(X \otimes_K K[\epsilon])$$

  est une équivalence de catégories.

- Il existe un isomorphisme dans $D((X' \otimes_{K[\epsilon]} K) \times_K X)$

$$E \otimes^{\mathbb{L}}_{K[\epsilon]} K \simeq \gamma(\alpha_0^{-1}),$$

  où $\gamma(\alpha_0^{-1})$ est le faisceau structural du graphe de l'isomorphisme α_0^{-1} (i.e. le transposé de $\gamma(\alpha_0)$).

On commence par remarquer que la seconde condition implique que E est un faisceau cohérent sur $X' \times_K X$, plat sur X'. En effet, comme la question est locale sur $X' \times_K X$, cela découle du lemme suivant.

Lemme 5.2 *Soit A un anneau commutatif et $I \subset A$ un idéal de carré nul. Soit $E \in D^b(A)$ un complexe borné de A-modules. On suppose que le complexe $E \otimes^{\mathbb{L}}_A A/I$ est cohomologiquement concentré en degré 0, et de plus que $H^0(E \otimes^{\mathbb{L}}_A A/I)$ est un A/I-module plat. Alors, E est cohomologiquement concentré en degré 0 et de plus $H^0(E)$ est un A-module plat.*

Preuve du lemme: Le lemme de Nakayama implique facilement que l'on a $H^i(E) = 0$ pour tout $i < 0$. Montrons que pour tout A-module N et tout $i < 0$, on a $H^i(E \otimes^{\mathbb{L}}_A N) = 0$. Comme tout A-module N s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow IN \longrightarrow N \longrightarrow N/IN \longrightarrow 0,$$

on voit qu'il nous suffit de montrer cette assertion pour des A-modules N qui sont des A/I-modules. Mais alors, on a

$$E \otimes^{\mathbb{L}}_A N \simeq (E \otimes^{\mathbb{L}}_A A/I) \otimes^{\mathbb{L}}_{A/I} N.$$

Par hypothèse sur E on trouve donc

$$E \otimes^{\mathbb{L}}_A N \simeq (H^0(E) \otimes_A A/I) \otimes_{A/I} N.$$

Ceci implique bien que $H^i(E \otimes^{\mathbb{L}}_A N) = 0$ pour tout $i < 0$ et tout N.

Lorsque $N = A$ on trouve que E est concentré en degré 0. De plus, pour tout A-module N on a alors

$$H^i(E \otimes^{\mathbb{L}}_A N) \simeq Tor^A_{-i}(H^0(E), N) = 0 \; \forall \; i < 0.$$

Ceci implique que $H^0(E)$ est plat sur A. $\square$

Comme nous l'avons dit plus haut, le lemme ci-dessus implique que E est un faisceau cohérent sur $X' \times_K X$, plat sur X'. De plus, pour tout point $y \in X'$, le faisceau cohérent E restreint à $\{y\} \times_K X := Spec\, k(y) \times_K X$ est isomorphe au faisceau gratte-ciel en $(y, \alpha_0^{-1}(y))$. On peut donc représenter E par un morphisme de K-champs

$$E : X' \longrightarrow \underline{Coh}^1(X) \simeq X \times_K B\mathbb{G}_m,$$

où $\underline{Coh}^1(X)$ est le champ des faisceaux cohérents de longeur 1 sur X. Ce morphisme est tel qu'il existe un isomorphisme naturel entre le morphisme induit

$$E \otimes_{K[\epsilon]} K : X' \otimes_{K[\epsilon]} K \longrightarrow (X \times_K B\mathbb{G}_m) \otimes_{K[\epsilon]} K \simeq X \times_K B\mathbb{G}_m,$$

et le morphisme

$$X' \otimes_{K[\epsilon]} K \xrightarrow{\alpha_0^{-1}} X \xrightarrow{id \times p} X \times_K B\mathbb{G}_m,$$

où p est le $\mathbb{G}_m$-torseur trivial sur X. La seconde composante du morphisme E induit un morphisme de K-champs

$$X' \longrightarrow B\mathbb{G}_m.$$

Ce dernier morphisme définit alors un fibré en droite sur X' qui est une déformation infinitésimale de $\mathcal{O}_{X'}$, et dont l'image réciproque sur $X' \times_K X$ sera notée $\mathcal{L}$. On considère alors $F := \mathcal{L}^{-1} \otimes E \in D(X' \times_K X)$. Cet objet F est un faisceau cohérent sur $X' \times_K X$, et par construction il existe un morphisme de K-schémas $f : X' \longrightarrow X$, et un isomorphisme de faisceaux cohérents $F \simeq \gamma(f)$, où $\gamma(f)$ est le graphe du morphisme f. Le morphisme f est alors tel que

$$f \otimes_{K[\epsilon]} K = \alpha_0^{-1} : X' \otimes_{K[\epsilon]} K \simeq X,$$

car ces deux morphismes possèdent des graphes dont les faisceaux structuraux sont isomorphes sur $(X' \otimes_{K[\epsilon]} K) \times_K X$. Ceci montre que la déformation (X', α) est triviale. $\square$

6 Lieu à dg-catégorie fixée des familles miniverselles

Le théorème qui suit est le résultat principal de ce travail. Rappelons qu'un morphisme propre et lisse de schémas $X \longrightarrow S$ est une famille miniverselle, si pour tout point $s \in S$, le morphisme de Kodaira-Spencer

$$T_s S \longrightarrow H^1(X_s, T_{X_s/k(s)})$$

est injectif (comme d'habitude, $X_s := X \times_S Spec\, k(s)$ est la fibre de $X \longrightarrow S$ en s).

Théorème 6.1 *Soit $X \longrightarrow S$ une famille miniverselle de schémas propres, lisses et géométriquement connexes, avec S un schéma quasi-compact. Soit K un corps algébriquement clos et T une dg-catégorie sur K. Soit $S(T)$ le sous-ensemble de $S(K)$ des points $Spec\, K \longrightarrow S$ tels que $L_{pe}(X \times_S Spec\, K)$ soit isomorphe dans $Ho(K - dg - cat)$ à T. Alors $S(T)$ est un ensemble au plus dénombrable.*

Preuve: Le morphisme $X \longrightarrow S$ définit un morphisme de champs

$$S \longrightarrow \mathcal{VAR}^c_{smpr},$$

et donc en composant avec Π un morphisme de préchamps

$$S \longrightarrow \mathcal{DGC}^c_{sat}.$$

La dg-catégorie T définit un morphisme de préchamps

$$t : Spec\, K \longrightarrow \mathcal{DGC}^c_{sat}.$$

Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{DGC}^c_{sat}$ le sous-préchamp plein qui est l'image essentielle (au sens des préchamps) du morphisme t. Le préchamp $\mathcal{T}$ est naturellement muni d'un morphisme $\mathcal{T} \longrightarrow Spec\, K$ (i.e. est un K-préchamp). On forme alors le diagramme homotopiquement cartésien de préchamps suivant

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "p"] & \mathcal{DGC}^c_{sat} \\ F \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{T}. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Soit $Z = a(F)$ le faisceau associé à F (pour la topologie étale). Le morphisme $F \longrightarrow S$ se factorise par $Z \longrightarrow S$, et l'image de l'application

$$F(K) \simeq Z(K) \longrightarrow S(K)$$

est par construction le sous-ensemble $S(T)$.

Lemme 6.2 *Le faisceau Z est représentable par un espace algébrique localement de présentation finie sur K. De plus, cet espace algébrique est recouvert (au sens de la topologie étale) par un nombre dénombrable de schémas affines.*

Preuve du lemme 6.2: On considère le diagramme homotopiquement cartésien suivant de préchamps

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "p"] & \mathcal{DGC}^c_{sat} \\ F \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[u] \\ F' \arrow[u] \arrow[r] & Spec\, K. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Soit G le préfaisceau en groupes des automorphismes du point t. On a alors une équivalence de préchamps $\mathcal{T} = BG$. Ainsi, on peut écrire le préfaisceau F comme un quotient F'/G, avec G qui opère sans points fixes sur F'. En passant au faisceaux associés, on trouve que Z est isomorphe au faisceau quotient de $a(F')$ par $a(G)$, avec $a(G)$ qui opère toujours librement sur $a(F')$. Or, d'après la proposition 3.1 $a(F')$ est un espace algébrique localement de présentation et $a(G)$ est un groupe algébrique. Ainsi, le faisceau quotient $Z = a(F'/G)$ est bien un espace algébrique localement de présentation finie. Enfin, comme $a(F')$ est une réunion dénombrable de sous-espaces ouverts de type fini sur K, on voit qu'il est recouvert par un nombre dénombrable de schémas affines. Comme le morphisme quotient $a(F') \longrightarrow Z$ est un épimorphisme, cela implique que Z est lui-même recouvert par un nombre dénombrable de schémas affines. $\square$

Lemme 6.3 *Le K-espace algébrique Z est isomorphe à un K-schéma de la forme $\coprod_A Spec\, K$ avec A un ensemble au plus dénombrable.*

Preuve du lemme 6.3: Soit $x \in F(K)$ un K-point. Sa projection s sur S est telle que $L_{pe}(X_s) \simeq T$. L'espace tangent de F en x s'inscrit dans un diagramme homotopiquement cartésien de groupoïdes

$$\begin{tikzcd} T_sS \arrow[r] & T_{\Pi(X_s)}\mathcal{DGC}^c_{sat} \\ T_xF \arrow[u] \arrow[r] & T_*\mathcal{T}. \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{T}$ est un sous-préchamp plein de $\mathcal{DGC}^c_{sat}$, le morphisme $T_*\mathcal{T} \longrightarrow T_T\mathcal{DGC}^c_{sat}$ est pleinement fidèle. Ceci montre que $T_xF \longrightarrow T_sS$ est pleinement fidèle, et donc que le diagramme induit sur les espaces tangents

$$\begin{tikzcd} T_sS \arrow[r, "Tp"] & T^0_{\Pi(X_s)}\mathcal{DGC}^c_{sat} \\ T_xF \arrow[u] \arrow[r] & T^0_*\mathcal{T}, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

est un diagramme cartésien d'ensembles pointés. Or, on a clairement $T^0_*\mathcal{T} \simeq 0$ car $\mathcal{T}$ ne possède qu'un unique objet. Ainsi, T_xF s'identifie à $Tp^{-1}(0)$. Or, le morphisme Tp se factorise en

$$T_sS \longrightarrow T^0_{X_s}\mathcal{VAR}^c_{smpr} \simeq H^1(X_s, T_{X_s/k(s)}) \longrightarrow T^0_{\Pi(X_s)}\mathcal{DGC}^c_{sat}.$$

Le premier de ces morphismes est injectif par hypothèse. Ainsi $T_xF = Tp^{-1}(0) = \{0\}$ d'après la proposition 5.1.

Nous venons de voir que $T_xF = 0$, ce qui implique que l'espace algébrique Z est non-ramifié sur *Spec* K (on remarquera que $T_xF \simeq T_xZ$ car K est algébriquement clos). Ainsi, on trouve que Z est isomorphe à un K-schéma de la forme $\coprod_A Spec\, K$. Enfin, la seconde partie du lemme 6.2 implique que A est au plus dénombrable. $\square$

Le lemme 6.3 implique que $S(T)$, qui est l'image de $Z(K)$ dans $S(K)$, est un ensemble au plus dénombrable. $\square$

Corollaire 6.4 *Soit $X \longrightarrow S$ une famille miniverselle de schémas projectifs, lisses et géométriquement connexes, avec S un schéma de type fini sur un corps k algébriquement clos. Soit D une catégorie triangulée k-linéaire, et $S(D)$ le sous-ensemble de $S(k)$ des points s tels que $D^b_{coh}(X_s)$ soit équivalente à D (comme catégorie triangulée k-linéaire). Alors $S(D)$ est un ensemble au plus dénombrable.*

Preuve: D'après [Or], deux variétés lisses et projectives complexes X et X' sont telles que $D^b_{coh}(X)$ et $D^b_{coh}(X')$ sont équivalentes (comme catégories triangulées), si et seulement si les deux dg-catégories $L_{pe}(X)$ et $L_{pe}(X')$ sont quasi-équivalentes. $\square$

7 Le cas des variétés complexes

Dans cette section nous démontrerons la conséquence suivante du corollaire 6.4.

Théorème 7.1 *Soit D une catégorie triangulée $\mathbb{C}$-linéaire. Alors, l'ensemble des classes d'isomorphismes de variétés complexes lisses, projectives et connexes X telles que $D^b_{coh}(X)$ soit équivalente (comme catégorie triangulée $\mathbb{C}$-linéaire) à D est au plus dénombrable.*

Preuve: Il s'agit de construire un nombre dénombrables de familles mini-verselles $\{X^\alpha \longrightarrow S^\alpha\}$ dont les fibres donnent toutes les variétés complexes lisses, projectives et connexes, puis d'appliquer le corollaire 6.4. Pour cela nous dirons qu'un ensemble de familles lisses, projectives et connexes $\{X^\alpha \longrightarrow S^\alpha\}$, avec S^α des schémas de type fini sur $\mathbb{C}$, est *dominant* si pour toute variété lisse, projective et connexe Y sur $\mathbb{C}$, il existe α et $s \in S^\alpha(\mathbb{C})$ tels que Y soit isomorphe à X^α_s.

Lemme 7.2 *Il existe un ensemble dominant de familles lisses, projectives et connexes $\{X^\alpha \longrightarrow S^\alpha\}_{\alpha\in A}$ avec A un ensemble dénombrable.*

Preuve du lemme 7.2: Soit H_n le schéma de Hilbert de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Ce schéma est une réunion disjointe dénombrable de variétés projectives. Soit H^{li}_n le sous-schéma ouvert formé des sous-schémas de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ qui sont lisses et connexes sur $\mathbb{C}$. Le schéma H^{li}_n est lui aussi une réunion disjointe dénombrable de schémas de type fini sur $\mathbb{C}$, que nous noterons $H^{li}_{n,m}$. De plus, la famille universelle

$$Z_{n,m} \subset H^{li}_{n,m} \times \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

induit un morphisme lisse, projectif et connexe $Z_{n,m} \longrightarrow H^{li}_{n,m}$. Par construction l'ensemble de familles

$$\{Z_{n,m} \longrightarrow H^{li}_{n,m}\}_{n,m}$$

est dominant et dénombrable. $\square$

Lemme 7.3 *Soit $p : X \longrightarrow S$ un morphisme lisse, projectif et connexe avec S un schéma de type fini sur $\mathbb{C}$. Alors il existe un ensemble de familles mini-verselles $\{X^\alpha \longrightarrow S^\alpha\}_{\alpha\in A}$, avec A un ensemble dénombrable et tel que pour tout $s \in S(\mathbb{C})$ il existe α et $t \in S^\alpha(\mathbb{C})$ tels que X_s et X^α_t soient isomorphes.*

Preuve du lemme 7.3: En stratifiant S on peut supposer que les propriétés suivantes sont satisfaites.

- Le schéma S est affine, lisse et connexe.
- Le faisceau cohérent $\mathbb{R}^1p_*(T_{X/S})$ est un fibré vectoriel, et sa formation commute aux changements de bases sur S.

- Le morphisme de Kodaira-Spencer

$$\Theta : T_S \longrightarrow \mathbb{R}^1 p_*(T_{X/S})$$

possède un noyau K et un conoyau C qui sont des fibrés vectoriels sur S.

Soient $p \in S(\mathbb{C})$ et $u \in K(S)$ une section globale qui ne s'annule pas en p. Soit $p \in S_1 \subset S$ un sous-schéma de codimension 1 qui soit lisse en p et tel que $u(p) \notin T_{S_1,p}$. Par construction, il existe un ouvert de Zariski $p \in S_1' \subset S_1$ qui est lisse et tel que pour tout $s \in S_1'(\mathbb{C})$ le noyau de l'application de Kodaira-Spencer

$$T_{S_1,s} \longrightarrow H^1(X_s, T_{X_s})$$

soit de dimension $r-1$, où r est le rang de K.

Le champ de vecteurs u définit une action locale du groupe additif $\mathbb{C}$

$$f : U \times W \longrightarrow S^{an},$$

où U est un disque ouvert de $\mathbb{C}$ et W est un voisinage ouvert de p dans S^{an}. Notons $W_1 = W \cap S_1^{an}$, et considérons le morphisme induit

$$g : U \times W_1 \subset U \times W \longrightarrow S^{an}.$$

Ce morphisme est étale en p, car $u(p)$ et $T_{S_1^{an},p}$ engendrent $T_{S^{an},p}$. Son image contient donc un voisinage de p, $V_p \subset S^{an}$.

Soit $s = g(x,t)$ un point de V_p, avec $(x,t) \in U \times W_1$. Par construction, la famille analytique

$$X^{an} \times_{S^{an}} U \times \{t\} \longrightarrow U$$

est telle que le morphisme de Kodaira-Spencer

$$T_{U,u} \longrightarrow H^1(X_{(u,t)}, T_{X_{(u,t)}})$$

est nul pour tout $u \in U$. Comme de plus le rang de $H^1(X_{(u,t)}, T_{X_{(u,t)}})$ est indépendant de u, cette famille est analytiquement isotriviale sur U (voir [Ko-Sp]), et comme U est connexe $X^{an}_{(u,t)}$ est ainsi isomorphe à $X^{an}_{(0,t)}$. Par GAGA on trouve donc que $X_{(u,t)} \simeq X_s$ est isomorphe à $X_{(0,t)} \simeq X_t$. Nous avons donc montré l'existence du sous-schéma $S_1 \subset S$, d'un ouvert de Zariski $S_1' \subset S_1$ lisse et contenant p, et d'un voisinage V_p de p dans S^{an}, qui vérifient les deux conditions suivantes.

1. Pour tout $s \in V_p$ il existe $t \in V_p \cap S_1^{an}$ tel que X_s soit isomorphe à X_t.
2. Pour tout $s \in S_1'(\mathbb{C})$ le noyau de l'application de Kodaira-Spencer

   $$T_{S_1,s} \longrightarrow H^1(X_s, T_{X_s})$$

   est de dimension $r-1$.

Quitte à restreindre V_p on pourra aussi supposer que $V_p \cap S_1^{an} \subset (S_1')^{an}$.

Restreingons maintenant la famille X sur l'ouvert S_1' de S_1. En renouvelant plusieurs fois la même construction on démontre que pour tout $p \in S^{an}$, il existe un sous-schéma $p \in S_p \subset S$, un ouvert de Zariski $S_p' \subset S_p$ lisse et contenant p, et un ouvert $p \in V_p \subset S^{an}$ avec $V_p \cap S_1^{an} \subset (S_1')^{an}$, et qui vérifient les deux conditions suivantes.

1. Pour tout $s \in V_p$ il existe $t \in (S_p')^{an}$ tel que X_s soit isomorphe à X_t.
2. Pour tout $s \in S_p'$ l'application de Kodaira-Spencer
$$T_{S_p',s} \longrightarrow H^1(X_s, T_{X_s})$$
est injective.

Pour terminer, l'espace topologique S^{an} se plonge comme sous-espace fermé dans $\mathbb{C}^n$, et est donc une réunion dénombrable de sous-espaces compacts (e.g. les traces des boules fermées de rayon entier dans $\mathbb{C}^n$). Ceci implique qu'il existe un ensemble dénombrable de points $\{p_i\}_{i \in I}$ de S^{an} tel que les ouverts V_{p_i} recouvrent S^{an}. L'ensemble de familles
$$\{X \times_S S_{p_i}' \longrightarrow S_{p_i}'\}_{i \in I}$$
vérifie alors la conclusion du lemme. □

Lemme 7.4 *Il existe un ensemble dominant de familles lisses, projectives et connexes* $\{X^\alpha \longrightarrow S^\alpha\}_{\alpha \in A}$ *avec* A *un ensemble dénombrable, et tel que chaque famille* $X^\alpha \longrightarrow S^\alpha$ *soit miniverselle.*

Preuve du lemme 7.4: C'est une conséquence immédiate des lemmes 7.2 et 7.3. □

Le théorème 7.1 découle maintenant du lemme 7.4 et du corollaire 6.4. □

8 Remarques et compléments

Nous terminerons ce travail par quelques remarques et compléments concernant les résultats présentés ainsi que les méthodes utilisées pour les démontrer.

1. Comme nous l'avons mentionné lors de l'introduction, la conjecture de Kawamata 0.1 implique le théorème 6.1. En effet, si $X \longrightarrow S$ est une famille miniverselle de schémas propres, lisses et connexes, et si X_0 est un schéma propre et lisse sur un corps K, alors le sous-ensemble $S(X_0) \subset S(K)$, formé des points s tels que X_s soit isomorphe à X_0, est (au plus) dénombrable (cela montre bien que le conjecture 0.1 implique le théorème 6.1). Ce

fait se démontre de la même façon que le théorème 6.1. On commence par considérer le morphisme $S \longrightarrow \mathcal{VAR}^c_{smpr}$, et on forme le carré homotopiquement cartésien suivant

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r] & \mathcal{VAR}^c_{smpr} \\ F \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{X}_0 \arrow[u] \end{tikzcd},$$

où $\mathcal{X}_0$ est le sous-champ plein de $\mathcal{VAR}^c_{smpr}$ qui est l'image du morphisme $X_0 : Spec\, K \longrightarrow \mathcal{VAR}^c_{smpr}$. L'existence du schéma de Hilbert implique alors que F est un espace algébrique localement de type fini sur K. De plus, les schémas de Hilbert étant des réunions dénombrables de sous-espaces de type fini, on en déduit que F est recouvert par un nombre dénombrable de schémas affines. Enfin, la famille $X \longrightarrow S$ étant miniverselle on voit que $F \longrightarrow Spec\, K$ est non-ramifié, et donc de la forme $\coprod_A Spec\, K$ pour A un ensemble dénombrable. Ainsi, $S(X_0)$, qui est l'image de $F(K) \longrightarrow S(K)$, est (au plus) dénombrable.

2. Le préchamp $\mathcal{DGC}^c_{sat}$ possède un champ associé $\widetilde{\mathcal{DGC}^c_{sat}}$. La proposition 3.1 montre que la diagonale de ce champ est représentable. Cependant, il semble que le champ $\widetilde{\mathcal{DGC}^c_{sat}}$ ne soit pas un champ algébrique (ainsi, la réponse à la question [To3, Q. 4.5] semble négative). En effet, l'existence de déformations formelles de schémas propres et lisses qui ne sont pas algébrisables implique probablement l'existence de déformations formelles de dg-catégories saturées qui ne sont pas algébrisables (à traver la construction $L_{pe}(-)$). Cela semble lié au fait qu'un schéma (propre et lisse) formel dont la catégorie dérivée est saturée est en fait algébrisable, bien que nous ne savons pas si ce fait est toujours vrai (voir cependant [Bo-VdB] pour un énoncé du même ordre dans le cadre analytique).

   Le champ $\widetilde{\mathcal{DGC}^c_{sat}}$ se comporte en réalité de façon tout à fait similaire à $\mathcal{VAR}^c_{smpr}$. Il est bien connu qu'une façon de corriger le fait que $\mathcal{VAR}^c_{smpr}$ ne soit pas un champ algébrique est de considérer un champ de variétés polarisées. De même, il semble que pour obtenir un champ algébrique il faille considérer un champ de dg-catégories saturées munies de structures additionelles de type polarisation. Une piste possible serait de regarder le champ des dg-catégories saturées munies de structure de stabilité à la Bridgeland. Définir une version de $\widetilde{\mathcal{DGC}^c_{sat}}$ qui soit un champ algébrique nous semble dans tous les cas une question particulièrement intéressante.

3. Pour terminer, signalons aussi l'existence d'un "champ" classifiant les dg-catégories saturées qui ne sont pas forcément connexes. L'existence de groupes de cohomologie de Hochschild négatifs non triviaux implique que ce "champ" est en réalité un champ supérieur (voir [To3, §4.3 (6)], comme précédemment, ce champ supérieur n'est probablement pas algébrique). Ce champ possède aussi une version "dérivée", i.e. une version qui soit un D^--champ au sens de [HAGII]. On s'attend à ce que le complexe tangent de ce champ pris en une dg-catégorie T soit $HH(T)[2]$, le complexe de Hochschild décalé de 2. En particulier, l'espace tangent en T doit être $HH^2(T)$, ce qui semble être confirmé par le travail en cours [Ge-Ke].

L'identification de l'espace tangent de $\mathcal{DGC}^c_{sat}$ en T avec $HH^2(T)$ permet aussi de donner une autre preuve de la propriété de Torelli infinitésimal 5.1, tout au moins lorsque l'on se place en caractéristique nulle. En effet, pour $T = L_{pe}(X)$, avec $X \longrightarrow Spec\, K$ un schéma propre et lisse, et K de caractéristique nulle, on a (voir [Ye])

$$T^0_T\mathcal{DGC}^c_{sat} \simeq HH^2(T) \simeq H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^1(X, T_X) \oplus H^0(X, \wedge^2 T_X).$$

On voit ainsi que le morphisme

$$T^0\mathcal{VAR}^c_{smpr} \simeq H^1(X, T_X) \longrightarrow T^0_T\mathcal{DGC}^c_{sat} \simeq H^2(X, \mathcal{O}_X) \oplus H^1(X, T_X) \oplus H^0(X, \wedge^2 T_X)$$

est un facteur direct.

Références

[Bo-Or] A. Bondal, D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), 327–344.

[Bo-VdB] A. Bondal, M. Van Den Bergh, *Generators and representability of functors in commutative and non-commutative geometry*, Mosc. Math. J. **3** (2003), no. 1, 1–36.

[Ge-Ke] C. Geiss, B. Keller, *Infinitesimal deformations of derived categories*, exposé à Oberwolfach, Février 2005.

[Ke] B. Keller, *On differential graded categories*, pré-publication arXiv math.KT/0601185.

[Ko-Sp] K. Kodaira, D.C. Spencer, *On deformations of complex analytic structures. I, II*, Ann. of Math. (2) **67** (1958) 328–466.

[L-M] G. Laumon, L. Moret-Bailly, *Champs algébriques*, A Series of Modern Surveys in Mathematics vol. **39**, Springer-Verlag 2000.

[Or] D. Orlov, *Equivalences of derived categories and K3 surfaces*, J. Math Sci. (New York) **84**, (1997), 1361–1381.

[Ro] R. Rouquier, *Catégories dérivées et géométrie birationelle*, Séminaire Bourbaki, March 2005, à parraitre dans Astérisque, accessible à http://www.maths.leeds.ac.uk/~rouquier/papers.html

[Tab] G. Tabuada, *Une structure de catégorie de modèles de Quillen sur la catégorie des dg-catégories*, Comptes Rendus de l'Acadie de Sciences de Paris **340** (2005), 15–19.

[To1] B. Toën, *The homotopy of dg-categories and derived Morita theory*, à parraitre dans Inventiones (pré-publication arXiv math.AG/0408337).

[To2] B. Toën, *Finitude homotopique des dg-algèbres propres et lisses*, pré-publication arXiv math.AT/0609762.

[To3] B. Toën, *Higher and derived stacks: A global overview* pré-publication arXiv math.AG/0604504.

[HAGII] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry II: Geometric stacks and applications*, pré-publication arXiv math.AG/0404373, à parraitre dans Mémoires of the AMS.

[To-Va] B. Toën, M. Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories*, pré-publication arXiv math.AG/0503269, à parraitre dans Annales de l'ENS.

[Ye] A. Yekutieli, *The Continuous Hochschild Cochain Complex of a Scheme*, Canadian J. Math. Vol. **54** (6), (2002), 1319–1337.