

Finitude homotopique des dg-algèbres propres et lisses

Bertrand Toën

Laboratoire Emile Picard UMR CNRS 5580
 Université Paul Sabatier Toulouse 3, Bat 1R2
 31 062 TOULOUSE cedex 9, France

Septembre 2006

Résumé

On montre que toute dg-algèbre propre et lisse (sur un anneau de base k) est déterminée à quasi-isomorphisme près par sa \mathcal{A}_n -algèbre sous-jacente pour un certain n . De même, tout morphisme entre dg-algèbres propres et lisses est déterminé à homotopie près par le morphisme induit sur les \mathcal{A}_n -algèbres sous-jacentes. On démontre de plus que si k est local alors l'entier n peut être choisi uniformément pour toutes les dg-algèbres propres et lisses dont deux invariants numériques (le *type* et la *dimension cohomologique*) sont bornés.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Dg-algèbres	5
2.1	La théorie homotopique des dg-algèbres	5
2.2	Catégories dérivées	7
2.3	Lissité et propreté	8
2.4	Dimension cohomologique des dg-algèbres lisses	9
2.5	Dg-algèbres, \mathcal{A}_∞ -Algèbres et \mathcal{A}_n -algèbres	10
3	Familles quasi-compactes de dg-algèbres propres et lisses	13
3.1	Faisceaux quasi-compactes	13
3.2	Caractérisation des familles quasi-compactes de dg-algèbres propres et lisses . . .	15
4	Le théorème de finitude homotopique	21
4.1	Petit détour par la "nouvelle géométrie algébrique courageuse"	22
4.2	Preuve du théorème	26

1 Introduction

Soit k un anneau commutatif. Une k -dg-algèbre (associative et unitaire) B peut aussi être considérée comme une \mathcal{A}_n -algèbre (pour laquelle $\mu_i = 0$ pour $i > 2$, voir par exemple [Ke1, Lef, Ma]). L'objectif de cet article est d'étudier sous quelles conditions sur B existe-t-il un entier n tel que B soit déterminée à quasi-isomorphisme près par sa \mathcal{A}_n -algèbre sous-jacente. Les résultats principaux de ce travail affirment que cela est toujours le cas lorsque la dg-algèbre B est propre et lisse, c'est à dire lorsque B est parfait comme complexe de k -modules et aussi comme un bi- B -dg-module (voir [Ke2, Ko-So, To-Va1]). Plus précisément, notre premier résultat est le théorème suivant.

Théorème 1.1 (voir Cor. 2.11 et Cor. 4.6) *Soit B et B' deux k -dg-algèbres propres et lisses sur k , et pour un entier m notons $i_m^*(B)$ et $i_m^*(B')$ les \mathcal{A}_m -algèbres sous-jacentes. Alors il existe un entier n vérifiant les conditions suivantes.*

1. *Si $i_n^*(B)$ et $i_n^*(B')$ sont quasi-isomorphes comme \mathcal{A}_n -algèbres, alors B et B' sont quasi-isomorphes comme dg-algèbres.*
2. *L'application*

$$[B, B'] \longrightarrow [i_n^*(B), i_n^*(B')]$$

de l'ensemble des morphismes dans la catégorie homotopique des dg-algèbres vers l'ensemble des morphismes dans la catégorie homotopique des \mathcal{A}_n -algèbres est injective.

Les résultats que nous démontrons sont en réalité plus précis que l'énoncé précédent, car ils affirment que les morphismes naturels sur les espaces de morphismes et les espaces d'équivalences

$$\text{Map}(B, B') \longrightarrow \text{Map}(i_n^*(B), i_n^*(B'))$$

$$\text{Map}^{eq}(B, B') \longrightarrow \text{Map}^{eq}(i_n^*(B), i_n^*(B')),$$

possède des rétractions à homotopie près.

Le théorème 1.1 est une interprétation du fait que les dg-algèbres propres et lisses sont déterminées par leurs \mathcal{A}_n -algèbres sous-jacentes (pour un n qui varie avec les dg-algèbres considérées). C'est pour cette propriété remarquable que nous utilisons l'expression *finitude homotopique* qui apparaît dans notre titre.

Le second résultat de ce travail précise que l'entier n peut être choisis uniformément pour toutes les dg-algèbres propres et lisses dont deux invariants numériques, que nous appelons le *type* et la *dimension cohomologique*, sont bornés. Un type est une application à support fini $\nu : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$. Une k -dg-algèbre B qui est propre est alors *de type* ν si pour tout morphisme $k \longrightarrow K$ avec K un corps, on a pour tout $i \in \mathbb{Z}$

$$\text{Dim}_K H^i(B \otimes_k^{\mathbb{L}} K) \leq \nu(i).$$

Pour une k -dg-algèbre lisse B , nous introduisons un second invariant $d \in \mathbb{N}$, appelé la *dimension cohomologique*, qui mesure d'une certaine façon la longueur d'une résolution libre de B comme un bi- B -dg-module (on renvoie à la définition 2.6 pour les détails sur cette notion). Notre second théorème s'énonce alors comme suit.

Théorème 1.2 (voir Cor. 4.2) *Supposons que k soit un anneau local. Alors, pour tout type ν et tout entier d , il existe un entier $n(\nu, d)$ tel que pour toutes k -dg-algèbres B et B' de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d on ait les deux propriétés suivantes.*

1. *Si $i_n^*(B)$ et $i_n^*(B')$ sont quasi-isomorphes comme \mathcal{A}_n -algèbres, alors B et B' sont quasi-isomorphes comme dg-algèbres.*
2. *L'application*

$$[B, B'] \longrightarrow [i_n^*(B), i_n^*(B')]$$

est injective.

Tout comme le théorème 1.1 nous démontrerons en réalité un énoncé plus précis portant sur les espaces de morphismes et les espaces d'équivalences. De plus, lorsque k n'est plus local nous montrons que le théorème 1.2 reste valable localement pour la topologie de Zariski sur $\text{Spec } k$ (voir Thm. 4.1). Enfin, la preuve que nous donnons du théorème 1.2 montre que l'entier $n(\nu, d)$ ne dépend que du couple (ν, d) et non pas de l'anneau k (voir Thm. 4.7).

Avant de donner quelques idées des preuves des théorèmes 1.1 et 1.2 mentionons le corollaire suivant. Pour cela, on rappelle qu'une \mathcal{A}_∞ -algèbre B sur un corps k est minimale si la différentielle de son complexe sous-jacent est nulle (voir [Ke1, Lef]). On montre alors (voir [Lef]) que deux \mathcal{A}_∞ -algèbres minimales sont isomorphes dans $\text{Ho}(k - \mathcal{A}_\infty - \text{alg})$ si et seulement si elles sont \mathcal{A}_∞ -isomorphes (i.e. isomorphes dans une certaine catégorie de \mathcal{A}_∞ -algèbres et \mathcal{A}_∞ -morphisms). On déduit alors du théorème 1.2 le corollaire suivant, qui est une autre incarnation plus concrète de la propriété de finitude homotopique.

Corollaire 1.3 *Pour tout type ν et tout entier $d \geq 0$ il existe un entier $n(\nu, d)$ qui possède la propriété suivante. Pour tout corps k , si $\{\mu_i\}_{i \geq 2}$ et $\{\mu'_i\}_{i \geq 2}$ sont deux structures de \mathcal{A}_∞ -algèbres (sur k) sur un même complexe à différentielle nulle fixé V , telles que les \mathcal{A}_∞ -algèbres correspondantes B et B' soient propres et lisses, et si $\mu_i = \mu'_i$ pour tout $i \leq n(\nu, d)$, alors B et B' sont \mathcal{A}_∞ -isomorphes (i.e. les structures $\{\mu_i\}_{i \geq 2}$ et $\{\mu'_i\}_{i \geq 2}$ sont \mathcal{A}_∞ -conjuguées).*

Un mot des preuves et des techniques utilisées pour démontrer les théorèmes 1.1 et 1.2. Ces deux résultats utilisent de façon essentielle le fait qu'une dg-algèbre propre et lisse B est homotopiquement de présentation finie c'est à dire que $\text{Map}(B, -)$ commute à équivalence près avec les colimites filtrantes. Ce dernier fait se démontre à l'aide de la théorie homotopique des dg-catégories, et une preuve se trouve dans [To-Va1]. Le fait que les dg-algèbres propres et lisses soient homotopiquement de présentation finie implique presque immédiatement le point (2) du théorème 1.1. En effet, si on note $(i_n)_!$ l'adjoint à gauche du foncteur qui à une dg-algèbre associe sa \mathcal{A}_n -algèbre sous-jacente, et $\mathbb{L}(i_n)_!$ son foncteur dérivé à gauche, on montre que l'on a (voir Prop. 2.9)

$$\text{Hocolim}_n \mathbb{L}(i_n)_! i_n^*(B) \simeq B.$$

Ainsi, si B est homotopiquement de présentation finie, il existe un entier n tel que le morphisme naturel $\mathbb{L}(i_n)_! i_n^*(B) \longrightarrow B$ possède une section à homotopie près, car l'identité de B se factorise alors par un des $\mathbb{L}(i_n)_! i_n^*(B)$. Ceci implique alors que

$$[B, B'] \longrightarrow [i_n^*(B), i_n^*(B')] \simeq [\mathbb{L}(i_n)_! i_n^*(B), B']$$

possède une rétraction. Nous n'avons pas trouvé de preuve aussi directe pour le point (1) du théorème 1.1. La preuve que nous en donnons utilise des techniques élémentaires de *géométrie algébrique au-dessus des spectres*, encore appelée *nouvelle géométrie algébrique corageuse* (voir [HAGII, To-Va2]). Le point clé est ici de remarquer que pour deux dg-algèbres propres et lisses B et B' le foncteur $Eq(B, B')$ des équivalences entre B et B' , défini sur la catégorie des anneaux en spectres commutatifs, en représentable (i.e. est un schéma affine au-dessus de la catégorie des spectres, voir Lem. 4.4). Ceci est un fait remarquable de la géométrie algébrique au-dessus des spectres, car ce foncteur restreint aux anneaux commutatifs usuels n'est en général pas représentable par un schéma affine (sauf si B et B' sont cohomologiquement concentrées en degré 0). De plus, comme B est homotopiquement de présentation finie le foncteur $Eq(B, B')$ est encore homotopiquement de présentation finie, ce qui implique que l'anneau en spectres commutatif qui le représente est lui aussi homotopiquement de présentation finie. On montre alors de même que le foncteur $Eq_n(B, B')$ des équivalences entre les \mathcal{A}_n -algèbres $i_n^*(B)$ et $i_n^*(B')$ est représentable par un anneau en spectres commutatifs. Enfin, comme nous l'avons déjà vu plus haut on a $Eq(B, B') \simeq Holim_n Eq_n(B, B')$, et le caractère de présentation finie de $Eq(B, B')$ implique qu'il existe un entier n tel que $Eq(B, B') \rightarrow Eq_n(B, B')$ possède une rétraction.

Le théorème 1.2 quand à lui se déduit du théorème 1.1 et d'une propriété de quasi-compacité du foncteur des classes d'équivalences k -dg-algèbres propres, lisses de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d . En effet, nous montrons (voir Thm. 3.8) l'existence d'une k -algèbre commutative A_0 et d'une A_0 -dg-algèbre B_0 propre, lisse de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d , telle que pour toute k -dg-algèbre B propre, lisse de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d il existe des éléments $f_1, \dots, f_m \in k$ avec $\sum f_i = 1$, et des morphismes $A_0 \rightarrow k[f_i^{-1}]$ tels que pour tout i on ait

$$B_0 \otimes_{A_0}^{\mathbb{L}} k[f_i^{-1}] \simeq B \otimes_k k[f_i^{-1}],$$

dans la catégorie homotopique des $k[f_i^{-1}]$ -dg-algèbres. En d'autres termes, le schéma affine $Spec A_0$ domine, au sens de la topologie de Zariski, le foncteur des classes d'équivalences de dg-algèbres propres, lisses de type ν et de dimension cohomologique d . Le théorème 1.1 appliqué aux $A_0 \otimes_k A_0$ -dg-algèbres $B_0 \otimes_{A_0}^{\mathbb{L}} (A_0 \otimes_k A_0)$ et $(A_0 \otimes_k A_0) \otimes_{A_0}^{\mathbb{L}} B_0$ implique facilement le théorème 1.2.

Pour terminer cette introduction, signalons que les résultats de ce travail peuvent, et probablement doivent, être considérés dans le contexte des champs algébriques supérieurs et même dérivés (voir par exemple [To1]). On peut en effet espérer que le champ des dg-algèbres propres et lisses est un D^- -champ localement géométrique et localement de présentation fini au sens de [To-Va1], c'est à dire une réunion croissante de n -champs d'Artin (au sens dérivé) de type fini. De plus, notre caractérisation des familles quasi-compactes de dg-algèbres propres et lisses laisse penser que le sous-champ des dg-algèbres dont le type et la dimension cohomologique sont bornés est un champ d'Artin de type fini. Une approche naturelle pour démontrer le caractère algébrique du champ des dg-algèbres propres et lisses et d'appliquer le critère d'Artin, étendu par J. Lurie au cadre dérivé. Cependant, la vérification des conditions de ce critère ne paraît pas totalement évidente. Par exemple, montrer que ce champ est localement de présentation finie ne semble immédiat (voir le papier compagon [To2] pour une preuve de ce fait). Il en est de même de l'algébrisation des déformations formelles. La question du caractère algébrique du champ des dg-algèbres propres et lisses reste donc ouverte, et c'est pour cette raison que le point

de vue des champs n'a pas été adopté dans ce travail.

En effet, les théorèmes 1.1 et 1.2 sont des conséquences du fait que le champ des dg-

Remerciements: Je tiens à remercier D. Kaledin et T. Pantev pour des discussions sur les propriétés de finitudes des dg-algèbres propres et lisses qui ont inspirées les résultats de ce travail.

Conventions et notations: Nous nous excusons de négliger les considérations d'univers, et nous laissons le soins au lecteur de fixer des univers lorsque cela s'avère nécessaire.

Notre référence pour les catégories de modèles est [Ho]. Pour une catégorie de modèles M nous notons $Ho(M)$ sa catégorie homotopique, et $[-, -]$ l'ensemble des morphismes dans $Ho(M)$. Pour deux objets x et y dans M nous notons $Map_M(x, y)$, ou bien $Map(x, y)$ si le contexte est clair, l'ensemble simplicial des morphismes tel que défini dans [Ho, §5]. L'objet $Map(x, y)$ sera souvent considéré directement dans $Ho(SEns)$. Nous noterons $Map^{eq}(x, y)$ le sous-ensemble simplicial de $Map(x, y)$ qui est la réunion des composantes connexes correspondant aux équivalences entre x et y . Enfin, les produits fibrés homotopiques seront noté $x \times_z^h y$.

Tous les monoïdes considérés dans ce travail seront associatifs et unitaires (ainsi, tous nos anneaux seront associatifs et unitaires). De même, tous les modules sur un monoïde seront unitaires (ainsi, tous nos modules sur un anneau seront unitaires). Nous mettons en garde le lecteur que pour un anneau B la notation $B-Mod$ fait référence à la catégorie des B -dg-modules, et donc des complexes de B -modules, et non pas à la catégorie des B -modules au sens usuels (cette dernière ne sera pas notée).

Pour un anneau commutatif k on note $C(k)$ la catégorie des complexes non bornés de k -modules. On la munit de sa structure de modèles projectives pour laquelle les équivalences sont les quasi-isomorphismes et les fibrations sont les épimorphismes.

2 Dg-algèbres

Pour tout ce premier chapitre nous fixons un anneau commutatif k .

Commençons par rappeler que la catégorie des k -dg-algèbres est par définition la catégorie des monoïdes associatifs et unitaires dans la catégorie monoidale $C(k)$ des complexes de k -modules (non bornés). Elle sera notée $k-dg-alg$.

2.1 La théorie homotopique des dg-algèbres

On munit la catégorie $k-dg-alg$ de la structure de catégorie de modèles pour laquelle les fibrations sont les épimorphismes et les équivalences sont les quasi-isomorphismes. L'existence de cette structure de modèles se déduit des théorèmes généraux de [S-S] appliqués à la catégorie de modèles monoidales $C(k)$ des complexes de k -modules.

On donne ci-dessous quelques propriétés de la catégorie de modèles des k -dg-algèbres. Elles seront utilisées de façon implicite par la suite.

- La catégorie de modèles $k - dg - alg$ est engendrée par cofibration. Pour ensembles générateurs de cofibrations et de cofibrations triviales on peut prendre l'image de ceux de la catégorie de modèles $C(k)$ par le foncteur "k-dg-algèbre libre" $C(k) \longrightarrow k - dg - alg$.

- Le foncteur d'oubli

$$k - dg - alg \longrightarrow C(k)$$

présERVE les cofibrations (voir [S-S]). En particulier, une k -dg-algèbre cofibrante est aussi cofibrante comme complexe de k -modules, et en particulier est un complexe de k -modules projectifs sur k .

- Pour un morphisme d'anneaux commutatifs $u : k \longrightarrow k'$ on dispose d'une adjonction de Quillen

$$- \otimes_k k' : k - dg - alg \rightleftarrows k' - dg - alg : f,$$

où l'adjoint à droite f est le foncteur d'oubli. L'adjonction dérivée sera notée

$$- \otimes_k^{\mathbb{L}} k' : Ho(k - dg - alg) \rightleftarrows Ho(k' - dg - alg) : f,$$

et en général nous omettrons de noter le foncteur f .

- La catégorie de modèles $k - dg - cat$ est *compactement engendrée* au sens de [To-Va1]. En particulier, les objets homotopiquement de présentation finie sont exactement les objets équivalents aux retractes d'objets cellulaires finis. De façon plus précise, pour tout entier n notons $S_k(n)$ la k -dg-algèbre libre engendrée par un élément x en degré $-n$ avec $d(x) = 0$, et $D_k(n)$ la k -dg-algèbre libre engendrée par un élément α en degré $-n - 1$ et un élément β en degré $-n$ avec $d(\alpha) = \beta$. On dispose d'un morphisme naturel $S_k(n) \longrightarrow D_k(n + 1)$ qui envoie x sur β . On note I l'ensemble de ces morphismes $S_k(n) \longrightarrow D_k(n + 1)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, qui est un ensemble générateur de cofibrations pour $k - dg - alg$.

Un objet $B \in k - dg - Alg$ est I -cellulaire fini s'il existe une suite finie de diagrammes cocartésiens dans $k - dg - alg$

$$\begin{array}{ccc} B_i & \longrightarrow & B_{i+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ S_k(n_i) & \longrightarrow & D_k(n_i + 1), \end{array}$$

avec $B_r = B$ pour un certain r , et $B_0 = k$.

Un objet B est homotopiquement de présentation finie si pour tout système inductif filtrant d'objets (C_α) dans $k - dg - alg$ le morphisme naturel

$$Colim_\alpha Map(B, Colim_\alpha C_\alpha) \longrightarrow Map(B, Colim_\alpha C_\alpha)$$

est une équivalence.

On montre alors que les objets homotopiquement de présentation finie dans $k - dg - alg$ sont exactement les objets équivalents à des retractes d'objets I -cellulaires finis (voir [To-Va1]).

2.2 Catégories dérivées

Pour une k -dg-algèbre B , on définit la catégorie des B -dg-modules comme étant la catégorie des modules à gauche dans $C(k)$ sur le monoïde B (voir [S-S]). Cette catégorie sera notée $B - Mod$, et est munie de la structure de modèles pour laquelle les fibrations sont les épimorphismes et les équivalences sont les quasi-isomorphismes.

Définition 2.1 *La catégorie dérivée d'une k -dg-algèbre B est la catégorie homotopique de la catégorie de modèles $B - Mod$. Elle est notée*

$$D(B) := Ho(B - Mod).$$

La catégorie de modèles $B - Mod$ est stable au sens de [Ho, §7], ainsi la catégorie $D(B)$ hérite d'une structure naturelle de catégorie triangulée (les triangles distingués étant les images dans $D(B)$ des suites exactes de cofibrations dans $B - Mod$).

Pour un morphisme de k -dg-algèbres $B \rightarrow B'$ on dispose d'une adjonction de Quillen

$$B' \otimes_B - : B - Mod \rightleftarrows B' - Mod : f,$$

où l'adjoint à droite f est le foncteur d'oubli. Ceci induit une adjonction au niveau des catégories dérivées

$$B' \otimes_B^{\mathbb{L}} - : D(B) \rightleftarrows D(B') : f,$$

et comme précédemment nous oublierons généralement de noter le foncteur f . Cette adjoint est de plus une équivalence de Quillen si le morphisme $B \rightarrow B'$ est un quasi-isomorphisme (voir [S-S]).

Rappelons que pour une catégorie triangulée T et un objet $X \in T$ on note $\langle X \rangle_C T$ la sous-catégorie triangulée épaisse (i.e. stable par facteurs directs) engendrée par l'objet X (voir e.g. [Ne]). Par définition, $\langle X \rangle$ est la plus petite sous-catégorie triangulée épaisse de T contenant X .

Définition 2.2 *La catégorie dérivée parfaite d'une k -dg-algèbre B est définie par*

$$D_{parf}(B) = \langle B \rangle_C D(B).$$

Les objets de $D_{parf}(B)$ seront appelés les B -dg-modules parfaits.

On rappelle que les B -dg-modules parfaits possèdent les propriétés suivantes.

- Un objet de $D(B)$ est parfait si et seulement s'il est compact au sens de [Ne]. De même, un B -dg-module est parfait si et seulement s'il est homotopiquement de présentation finie dans la catégorie de modèles $B - Mod$. Ainsi, un B -dg-module est parfait si et seulement s'il est équivalent à un rétracte d'un B -dg-module I -cellulaire fini (voir [To-Va1] pour plus de détails).
- Les B -dg-modules sont stables par rétractes, extension et décalage.
- Lorsque B est une k -algèbre (non dg), les B -dg-modules parfaits sont exactement les complexes de B -modules quasi-isomorphes à des complexes bornés de B -modules projectifs de type fini.

- Les objets parfaits sont stables par changement de bases: pour un morphisme de k -dg-algèbres $B \rightarrow B'$ le foncteur $-\otimes_B^{\mathbb{L}} B'$ envoie B -dg-modules parfaits sur B' -dg-modules parfaits.

2.3 Lissité et propreté

Pour deux k -dg-algèbres B et B' on peut former leur produit tensoriel $B \otimes_k B'$ qui est encore une A -dg-algèbre. Cette construction peut se dériver à gauche en posant

$$B \otimes_k^{\mathbb{L}} B' := Q(B) \otimes_k B',$$

où Q est un foncteur de remplacement cofibrant dans $k - dg - alg$. Ce produit tensoriel dérivé est alors compatible avec la notion de quasi-isomorphisme et induit une structure monoidale symétrique

$$-\otimes_k^{\mathbb{L}} - : Ho(k - dg - alg) \times Ho(k - dg - alg) \longrightarrow Ho(k - dg - alg).$$

Notons que cette structure monoidale est compatible avec celle sur la catégorie $D(k) = Ho(C(k))$, dans le sens où le diagramme suivant commute à un isomorphisme naturel près

$$\begin{array}{ccc} Ho(k - dg - alg) \times Ho(k - dg - alg) & \longrightarrow & Ho(k - dg - alg) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(k) \times D(k) & \longrightarrow & D(k), \end{array}$$

où les foncteurs verticaux sont les foncteurs d'oubli des structures d'algèbres, et les foncteurs horizontaux sont les produits tensoriels dérivés $-\otimes_k^{\mathbb{L}} -$.

Pour une k -dg-algèbre B on considère B comme un dg-module sur $B \otimes_k B^{op}$, où le facteur B opère par multiplication à gauche et le facteur B^{op} opère par multiplication à droite. Par ailleurs, le morphisme naturel $Q(B) \rightarrow B$ induit un morphisme de k -dg-algèbres

$$B \otimes_k^{\mathbb{L}} B^{op} \longrightarrow B \otimes_k B^{op},$$

ce qui permet de voir B aussi comme un $B \otimes_k^{\mathbb{L}} B^{op}$ -dg-module. On considère ainsi B comme un objet dans $D(B \otimes_k^{\mathbb{L}} B^{op})$.

Définition 2.3 *Soit B une k -dg-algèbre.*

1. La k -dg-algèbre B est propre si B est parfait comme objet de $D(k)$ (i.e. si le complexe de k -modules sous-jacent à B est parfait).
2. La k -dg-algèbre B est lisse si B est parfait comme objet dans $D(B \otimes_k^{\mathbb{L}} B^{op})$.

Remarque 2.4 1. Il est important de remarquer que les notions précédentes de lissité et de propreté dépendent du choix de l'anneaux de base k .

2. Pour plus d'explication sur la terminologie de *lisse* et *propre* on renvoie à [Ko-So, To-Va1], où le lecteur trouvera aussi des exemples de telles dg-algèbres.

Un résultat clé concernant les dg-algèbres propres et lisses est le théorème suivant, tiré de [To-Va1], et dont la preuve, qui utilise la théorie homotopique des dg-catégories, ne sera pas reproduite ici. Ce théorème est à la base du théorème de finitude que nous démontrerons au paragraphe 4.

Théorème 2.5 ([To-Va1]) *Toute k -dg-algèbre propre et lisse est homotopiquement de présentation finie.*

2.4 Dimension cohomologique des dg-algèbres lisses

Soit B une k -dg-algèbre cofibrante. On considère l'adjonction de Quillen

$$B \otimes_k - : C(k) \rightleftarrows B - Mod : f,$$

où f est le foncteur d'oubli. Comme B est cofibrante elle est plate, et ces deux foncteurs préservent les équivalences. En posant $\mathcal{F} := (B \otimes_k -) \circ f$, cette adjonction définit un foncteur

$$\mathcal{R}_* : B - Mod \longrightarrow sB - Mod,$$

où $\mathcal{R}_*(M)$ est l'objet simplicial défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_*(M) : \Delta^{op} &\longrightarrow B - Mod \\ [n] &\mapsto \mathcal{F}^{\circ n}(M). \end{aligned}$$

Pour tout $M \in B - Mod$, l'objet simplicial $\mathcal{R}_*(M)$ est augmenté sur M , et n'est autre que la résolution simpliciale standard de M associée à l'adjonction précédente (voir [II]). En particulier, le morphisme induit

$$|\mathcal{R}_*(M)| := \text{Hocolim}_{[n] \in \Delta^{op}} \mathcal{R}_n(M) \longrightarrow M$$

est un isomorphisme dans $D(B - Mod)$ pour tout B -dg-module M . De plus, pour $M \in B - Mod$, l'objet $|\mathcal{R}_*(M)|$ est naturellement équivalent à la colimite filtrante

$$|\mathcal{R}_*(M)| \simeq \text{Colim}_{k \in \mathbb{N}} |Sq_k \mathcal{R}_*(M)|,$$

où $|Sq_k \mathcal{R}_*(M)|$ est la colimite homotopique du diagramme $\mathcal{R}_*(M)$ restreint à la sous-catégorie pleine $\Delta_{\leq k}^{op} \subset \Delta^{op}$ formée des objets $[n]$ avec $n \leq k$. On obtient ainsi un isomorphisme dans $D(B)$

$$\text{Colim}_{k \in \mathbb{N}} |Sq_k \mathcal{R}_*(M)| \simeq M.$$

Soit maintenant B une k -dg-algèbre quelconque, et $Q(B) \longrightarrow B$ un modèle cofibrant. Pour un B -dg-module M , on peut considérer M comme un $Q(B)$ -dg-module et appliquer la construction précédente. Cela nous fournit alors un isomorphisme dans $D(Q(B))$

$$\text{Colim}_{k \in \mathbb{N}} |Sq_k \mathcal{R}_*(M)| \simeq M,$$

où la résolution $\mathcal{R}_*(M)$ est calculée dans les $Q(B)$ -dg-modules. Comme $-\otimes_{Q(B)}^{\mathbb{L}} B : D(Q(B)) \longrightarrow D(B)$ est une équivalence de catégorie, nous considérerons aussi cet isomorphisme dans $D(B)$ (sans pour autant spécifier le changement de bases $-\otimes_{Q(B)}^{\mathbb{L}} B$). Nous mettons en garde le lecteur que l'objet $|\mathcal{R}_*(M)|$ dans $D(Q(B))$, vu comme un objet simplicial dans $D(B)$ à l'aide du foncteur $-\otimes_{Q(B)}^{\mathbb{L}} B$ n'est pas la résolution libre standard du B -dg-module M en général.

Définition 2.6 1. Une dg -module sur une k - dg -algèbre B est de dimension cohomologique inférieure à $d \in \mathbb{N}$ si le morphisme d'augmentation

$$|Sq_d \mathcal{R}_*(M)| \longrightarrow M$$

possède une section dans $D(Q(B)) \simeq D(B)$.

2. Une dg -module sur une k - dg -algèbre est de dimension cohomologique infinie s'il n'est pas de dimension cohomologique inférieure à d pour tout $d \in \mathbb{N}$. Il est de dimension cohomologique finie sinon.
3. Une k - dg -algèbre B est de dimension cohomologique inférieure à $d \in \mathbb{N}$ si le $B \otimes_k^{\mathbb{L}} B^{op}$ - dg -module B est de dimension cohomologique inférieure à d .
4. Une k - dg -algèbre est de dimension cohomologique infinie si elle n'est pas de dimension cohomologique inférieure à d pour tout $d \in \mathbb{N}$. Elle est de dimension cohomologique finie sinon.

Remarque 2.7 1. Commençons pas remarquer que la notion de dimension cohomologique d'une k - dg -algèbre B dépend du choix de la base k (car $B \otimes_k^{\mathbb{L}} B^{op}$ dépend de cette base).

2. Il est facile de voir qu'un dg -module qui est de dimension cohomologique inférieure à d est aussi de dimension cohomologique inférieure à d' pour tout $d' \geq d$. De même pour une k - dg -algèbre.
3. Remarquons aussi que pour tout B - dg -module M on a

$$M \simeq \text{Colim}_{k \in \mathbb{N}} |Sq_k \mathcal{R}_*(M)|.$$

Ainsi, si M est parfait il existe un entier $k \geq 0$ tel que le morphisme d'augmentation

$$|Sq_k \mathcal{R}_*(M)| \longrightarrow M$$

possède une section dans $D(B)$. Ceci montre qu'un tout dg -module parfait est de dimension cohomologique finie. En particulier, une k - dg -algèbre lisse est toujours de dimension cohomologique finie. Réciproquement on peut voir qu'un B - dg -module M qui est parfait sur k et qui est de dimension cohomologique finie est aussi un B - dg -module parfait. Ainsi, une k - dg -algèbre propre est lisse si et seulement si elle est de dimension cohomologique finie.

2.5 Dg-algèbres, \mathcal{A}_∞ -Algèbres et \mathcal{A}_n -algèbres

Commençons par rappeler la notion d'opéade dans une catégorie monoidale symétrique (voir [Sp]). Dans ce qui suit nous ne considérerons que des opéades "non- Σ " et unitaires, et les algèbres sur ces opéades seront toujours unitaires. D'après [Sp] la catégorie des opéades $Op(C(k))$ dans la catégorie des complexes de k -modules est munie d'une structure de catégorie de modèles pour laquelle les fibrations et les équivalences sont définis sur les complexes sous-jacents.

On rappelle d'après l'existence des opéades \mathcal{A}_∞ et \mathcal{A}_n au-dessus dans la catégorie monoidale symétrique $C(k)$. Rappelons, qu'en tant qu'opéade dans les k -modules gradués (i.e. en oubliant

la différentielle) \mathcal{A}_∞ est librement engendrée par des opérations $\mu_i \in \mathcal{A}_\infty(i)$ de degrés $2 - i$. En utilisant les notations de [Ma] on a

$$\mathcal{A}_\infty = \Gamma(\mu_2, \mu_3, \dots, \mu_i, \dots).$$

La différentielle sur \mathcal{A}_∞ est alors définie par la formule suivante

$$\partial(\mu_n) = \sum_{i+j=n+1, i, j \geq 2} \sum_{s=0}^{s=n-1} (-1)^{j+s(j+1)} \mu_i(\mathbf{1}^{\otimes s} \otimes \mu_j \otimes \mathbf{1}^{\otimes i-s-1}).$$

L'opérade \mathcal{A}_∞ est cofibrante pour la structure de modèles de [Sp], et les algèbres sur \mathcal{A}_∞ sont précisément les \mathcal{A}_∞ -algèbres au sens usuel (e.g. de [Ke1, Lef]). D'après [Sp], la catégorie $k - \mathcal{A}_\infty - alg$, des algèbres unitaires sur \mathcal{A}_∞ est munie d'une structure de catégorie de modèles pour laquelle les fibrations et les équivalences sont définis sur les complexes sous-jacents. De plus, il existe un morphisme naturel d'opérades $p : \mathcal{A}_\infty \rightarrow Ass$, où Ass est l'opérade des algèbres associatives. Ce morphisme induit une adjonction de Quillen

$$p_! : k - \mathcal{A}_\infty - alg \rightleftarrows k - dg - alg : p^*$$

qui s'avère être une équivalence de Quillen. A travers cette équivalence de Quillen nous identifierons souvent la théorie homotopique des k -dg-algèbres avec celle de k - \mathcal{A}_∞ -algèbres, sans pour autant mentionner l'équivalence $(\mathbb{L}p_!, p^*)$.

Pour un entier $n \geq 2$, on note $\mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}_\infty$ la sous-opérade engendrée par les opérations μ_i pour $2 \leq i \leq n$. Les opérades \mathcal{A}_n sont cofibrantes, et les algèbres au-dessus de \mathcal{A}_n sont précisément les \mathcal{A}_n -algèbres. Les morphismes d'inclusions $i_n : \mathcal{A}_n \hookrightarrow \mathcal{A}_\infty$ induisent des adjonctions de Quillen

$$(i_n)_! : k - \mathcal{A}_n - alg \rightleftarrows k - \mathcal{A}_\infty - alg : i_n^*.$$

Lemme 2.8 *Le morphisme naturel*

$$Hocolim_n \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{A}_\infty$$

est une équivalence dans $Op(C(k))$.

Preuve: Cela se déduit du fait que les colimites filtrantes sont aussi des colimites homotopiques dans $Op(C(k))$, et du fait évident que $Colim_n \mathcal{A}_n \simeq \mathcal{A}_\infty$. \square

Nous allons déduire du lemme 2.8 le résultat suivant.

Proposition 2.9 *Soient B et B' deux k -dg-algèbres. Alors le morphisme naturel d'ensembles simpliciaux*

$$Map_{k-dg-alg}(B, B') \longrightarrow Map_{k-\mathcal{A}_\infty}(p^*(B), p^*(B')) \longrightarrow Holim_n Map_{k-\mathcal{A}_n-alg}(i_n^* p^*(B), i_n^* p^*(B'))$$

est un équivalence.

Preuve: Le premier de ces morphismes est une équivalence car $(p_!, p^*)$ est une équivalence de Quillen. Il nous faut donc montrer que le second morphisme est aussi une équivalence.

Pour une catégorie de modèles M nous noterons $|M|$ l'ensemble simplicial nerf de la sous-catégorie des équivalences dans M . On considère alors les morphismes naturels

$$\begin{array}{ccc} |k - \mathcal{A}_\infty - alg| & \longrightarrow & Holim_n |k - \mathcal{A}_n - alg| \\ \downarrow q & \swarrow r & \\ |C(k)|, & & \end{array}$$

où les morphismes vers $|C(k)|$ sont induits par les foncteurs qui oublient les structures d'algèbres et ne retiennent que les complexes sous-jacents. On utilise alors les résultats de [Re1], ou plutôt ses généralisations immédiates au-dessus de $C(k)$. D'après [Re1, Thm. 1.2.15], pour $E \in |C(k)|$ un complexe, les morphismes induits sur les fibres homotopiques des morphismes q et r sont équivalents aux morphismes naturels

$$Map_{Op(C(k))}(\mathcal{A}_\infty, \mathbb{R}End(E)) \longrightarrow Holim_n Map_{Op(C(k))}(\mathcal{A}_n, \mathbb{R}End(E)),$$

où $\mathbb{R}End(E)$ est l'opérate d'endomorphismes d'un modèles cofibrant pour E . D'après le lemme 2.8, ce dernier morphisme est un équivalence. On en déduit donc que le morphisme

$$|k - \mathcal{A}_\infty - alg| \longrightarrow Holim_n |k - \mathcal{A}_n - alg|$$

est une équivalence.

Notons maintenant $Mor(C(k))$ la catégorie de modèles des morphismes dans $C(k)$ (munie par exemple de sa structure projective pour laquelle les fibrations et les équivalences sont définies sur les objets sous-jacents dans $C(k)$). La catégorie de modèles $Mor(C(k))$ reste une catégorie de modèles monoidale symétrique pour laquelle la structure monoidale est définie objets par objets dans M . On dispose donc de catégorie de modèles de \mathcal{A}_∞ et \mathcal{A}_n -algèbres dans $Mor(C(k))$, qui s'identifie aux catégories de modèles $Mor(k - \mathcal{A}_\infty - alg)$ et $Mor(k - \mathcal{A}_n - alg)$. On peut donc de nouveau appliquer [Re1, Thm. 1.2.15] au-dessus de la catégorie de base $Mor(C(k))$, et par le même argument que ci-dessus on obtient une équivalence de nerfs

$$|Mor(k - \mathcal{A}_\infty - alg)| \longrightarrow Holim_n |Mor(k - \mathcal{A}_n - alg)|.$$

Pour terminer la preuve de la proposition 2.9, soient B et B' deux points dans $|k - \mathcal{A}_\infty - alg|$. On dispose d'un diagramme homotopiquement commutatif

$$\begin{array}{ccc} |Mor(k - \mathcal{A}_\infty - alg)| & \xrightarrow{u} & |k - \mathcal{A}_\infty - alg| \times |k - \mathcal{A}_\infty - alg| \\ \downarrow & & \downarrow \\ Holim_n |Mor(k - \mathcal{A}_n - alg)| & \xrightarrow{v} & Holim_n (|k - \mathcal{A}_n - alg| \times |k - \mathcal{A}_n - alg|), \end{array}$$

où les morphismes horizontaux associent à un morphisme sa source et son but. Les morphismes verticaux étant des équivalences on en déduit une équivalence entre les fibres homotopiques de u et de v prises en le point (B, B') . Mais d'après [Re2, Thm.8.3] ce morphisme induit sur les fibres homotopiques est équivalent au morphisme

$$Map_{k - \mathcal{A}_\infty - alg}(B, B') \longrightarrow Holim_n Map_{k - \mathcal{A}_n - alg}(i_n^*(B), i_n^*(B')).$$

Ceci termine la preuve de la proposition 2.9. \square

Corollaire 2.10 *Pour toute k -dg-algèbre B (considérée aussi comme une $k - \mathcal{A}_\infty$ -algèbre) le morphisme naturel*

$$\text{Colim}_n \mathbb{L}(i_n)_! i_n^*(B) \longrightarrow B$$

est une équivalence.

Preuve: D'après la proposition 2.9 pour tout $B' \in k - dg - alg$ le morphisme naturel

$$\begin{aligned} \text{Map}_{k-dg-alg}(B, B') &\longrightarrow \text{Map}_{k-dg-alg}(\text{Colim}_n \mathbb{L}(i_n)_! i_n^*(B), B') \\ &\simeq \text{Holim}_n \text{Map}_{k-dg-alg}(\mathbb{L}(i_n)_! i_n^*(B), B') \simeq \text{Holim}_n \text{Map}_{k-\mathcal{A}_n-alg}(i_n^*(B), i_n^*(B')) \end{aligned}$$

est une équivalence. Le lemme de Yoneda pour la catégorie homotopique $Ho(k - dg - alg)$ implique donc que le morphisme $\text{Colim}_n \mathbb{L}(i_n)_! i_n^*(B) \longrightarrow B$ est un isomorphisme dans $Ho(k - dg - alg)$ et donc une équivalence. \square

Corollaire 2.11 *Pour toute k -dg-algèbre B qui est homotopiquement de présentation finie (e.g. propre et lisse), il existe un entier n tel que le morphisme*

$$\mathbb{L}(i_n)_! i_n^*(B) \longrightarrow B$$

possède une section dans $Ho(k - dg - alg)$.

Preuve: C'est une conséquence immédiate du corollaire 2.10 et de la définition d'être homotopiquement de présentation finie. \square

3 Familles quasi-compactes de dg-algèbres propres et lisses

On fixe un anneau commutatif de base k .

3.1 Faisceaux quasi-compactes

Notons $\widehat{k - Aff}$ la catégorie des foncteurs $k - Aff^{op} = k - CAlg \longrightarrow Ens$, de la catégorie des k -algèbres commutatives vers celle des ensembles. Nous aurons aussi à considérer la catégorie $SPr(k - Aff)$, des objets simpliciaux dans $\widehat{k - Aff}$ (c'est aussi la catégorie des foncteurs $k - CAlg \longrightarrow SEns$). La catégorie $SPr(k - Aff)$ est munie de sa structure de modèles projective niveaux par niveaux (i.e. fibrations et équivalences sont définies objets par objets au-dessus de $k - Aff$, nous n'incluons pas la topologie de Zariski dans cette structure de modèles). On dispose d'un foncteur

$$\pi_0 : SPr(k - Aff) \longrightarrow \widehat{k - Aff}$$

qui à F associe le préfaisceau $A \mapsto \pi_0(F(A))$. Le foncteur π_0 est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\widehat{k - Aff} \longrightarrow SPr(k - Aff)$ qui voit un préfaisceau d'ensembles comme un préfaisceau d'ensembles simpliciaux constant dans la direction simpliciale.

Définition 3.1 Nous dirons qu'un foncteur $F \in \widehat{k - Aff}$ est quasi-compact s'il existe un schéma affine X et un morphisme de préfaisceaux $X \rightarrow F$ qui induise un épimorphisme sur les faisceaux associés pour la topologie de Zariski sur $k - Aff$.

Remarque 3.2 Un morphisme de préfaisceaux $F \rightarrow G$ qui induit un épimorphisme sur les faisceaux Zariski associés sera appelé un *épimorphisme Zariski local*.

En d'autres termes, le préfaisceau F est quasi-compact si et seulement s'il existe une k -algèbre commutative A_0 et un élément $x \in F(A_0)$, tels que pour tout $A \in k - CAlg$ et tout $y \in F(A)$, il existe des éléments $a_1, \dots, a_n \in A$ avec $\sum a_i = 1$, et des morphismes $u_i : A_0 \rightarrow A[a_i^{-1}]$, avec $u_i(x) = f_i(y)$ dans $F(A[a_i^{-1}])$, où $f_i : A \rightarrow A[a_i^{-1}]$ est le morphisme canonique.

Le lemme suivant fournit deux procédés pour vérifier qu'un préfaisceau est quasi-compact.

Lemme 3.3 1. Soit $F \rightarrow G$ un morphisme dans $\widehat{k - Aff}$. On suppose que G est quasi-compact et que pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \rightarrow G$ le préfaisceau $F \times_G X$ est quasi-compact. Alors F est quasi-compact.

2. Soit F et G deux préfaisceaux simpliciaux sur $k - Aff$

$$F, G : k - Aff^{op} \rightarrow SEns,$$

et $f : F \rightarrow G$ un morphisme. On suppose que le préfaisceau $\pi_0(F)$ est quasi-compact, et que pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \rightarrow G$ le préfaisceau $\pi_0(F \times_G^h X)$ est quasi-compact. Alors le préfaisceau $\pi_0(F)$ est quasi-compact.

3. Soit F un préfaisceau tel qu'il existe un schéma quasi-compact X et un épimorphisme Zariski local $X \rightarrow F$, alors F est quasi-compact.

Preuve: (1) On choisit un épimorphisme Zariski local $X \rightarrow G$, avec X un schéma affine. Par hypothèse on peut choisir un épimorphisme Zariski local $Y \rightarrow F \times_G X$ avec Y un schéma affine. Le morphisme composé $Y \rightarrow F \times_G X \rightarrow F$ est un encore un épimorphisme Zariski local, car composé de deux épimorphismes Zariski locaux (on utilise ici que les épimorphismes Zariski locaux sont stables par compositions et changement de bases).

(2) Pour tout schéma affine X et tout morphisme $X \rightarrow G$, le morphisme naturel

$$\pi_0(F \times_G^h X) \rightarrow \pi_0(F) \times_{\pi_0(G)} X$$

est un épimorphisme de préfaisceaux, et en particulier un épimorphisme Zariski local. Par hypothèse $\pi_0(F \times_G^h X)$ est quasi-compact, et ainsi le préfaisceau $\pi_0(F) \times_{\pi_0(G)} X$ est aussi quasi-compact. On peut alors appliquer le point (1) au morphisme $\pi_0(F) \rightarrow \pi_0(G)$.

(3) Le schéma est recouvert par un nombre fini d'ouverts Zariski affines U_i . On pose $U := \coprod_i U$ (coproduit pris dans les schémas), qui est un schéma affine. Alors, le morphisme composé $U \rightarrow X \rightarrow F$ est un épimorphisme Zariski local. \square

Définition 3.4 Soit $G \in \widehat{Aff}$ un préfaisceau.

1. Une famille d'objets dans G est un sous-ensemble $\mathcal{F} \subset G(k)$.
2. Une famille \mathcal{F} d'objets de G est quasi-compacte s'il existe un sous-préfaisceau quasi-compact $F \subset G$ tel que $\mathcal{F} \subset F(k)$.

Remarque 3.5 Il est important de noter que la propriété de quasi-compactité dépend d'un préfaisceau ambiant G . En général si $G \subset G'$ est une inclusion de préfaisceaux, une famille \mathcal{F} d'objets dans G peut tout à fait être quasi-compacte comme famille d'objets dans G' mais pas comme famille d'objets dans G . Par exemple, on peut prendre pour G un schéma affine qui n'est pas de type fini sur k , pour G' un ouvert non quasi-compact de G et $\mathcal{F} := G'(k)$. La famille \mathcal{F} est quasi-compacte dans G' car G' est un schéma affine, mais n'est en général pas quasi-compacte dans G .

3.2 Caractérisation des familles quasi-compactes de dg-algèbres propres et lisses

Pour tout $A \in k - CAlg$, nous noterons $dga(A)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes dans la catégorie $Ho(A - dg - alg)$. Pour un morphisme $A \rightarrow A'$ dans $k - CAlg$, le foncteur de changement de bases $A' \otimes_A^{\mathbb{L}} - : Ho(A - dg - alg) \rightarrow Ho(A' - dg - alg)$ induit une application

$$dga(A) \rightarrow dga(A').$$

Ceci définit un préfaisceau $dga \in k - \widehat{Aff}$. Nous définissons aussi $dg - alg^{p,l} \subset dg - alg$ comme étant le sous-préfaisceau des dg-algèbres propres et lisses.

- Définition 3.6**
1. Une famille de k -dg-algèbres propres et lisses est une famille d'objets dans le préfaisceau $dg - alg^{p,l}$ (i.e. un sous-ensemble de l'ensemble des classes de quasi-isomorphismes de k -dg-algèbres propres et lisses).
 2. Une famille \mathcal{F} de k -dg-algèbres propres et lisses est quasi-compacte si elle l'est comme famille d'objets de $dg - alg^{p,l}$ (au sens de la définition 3.4).

En termes plus explicites: une famille de k -dg-algèbres propres et lisses \mathcal{F} est quasi-compacte s'il existe $A \in k - CAlg$ et B_0 une A -dg-algèbre propre et lisse sur A , tels que pour tout $B \in \mathcal{F}$, il existe des éléments $f_1, \dots, f_n \in k$, avec $\sum f_i = 1$, et des morphismes $A \rightarrow k[f_i^{-1}]$, tels que

$$B \otimes_k^{\mathbb{L}} k[f_i^{-1}] \simeq B_0 \otimes_k^{\mathbb{L}} k[f_i^{-1}]$$

pour tout i (il s'agit d'isomorphismes dans $Ho(k[f_i^{-1}] - dg - alg)$). On voit en particulier que lorsque k est un anneau local, on peut prendre $n = 1$ et $f_1 = 1$. On dispose dans ce cas d'un A -dg-algèbre B_0 propre et lisse sur A , tel que tout $B \in \mathcal{F}$ soit de la forme $B_0 \otimes_A^{\mathbb{L}} k$ pour un certain morphisme $A \rightarrow k$.

Pour énoncer notre théorème de caractérisation des familles quasi-compactes de k -dg-algèbres propres et lisse nous introduisons la notion de type d'une k -dg-algèbre propre.

Définition 3.7 1. Un type est une application $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ qui est nulle en dehors d'un intervalle fini (i.e. à support fini).

2. Soit ν un type et A un anneau commutatif. Nous dirons qu'un complexe parfait $E \in D_{\text{parf}}(A)$ est de type ν (relativement à A) si pour tout corps K et tout morphisme d'anneaux $A \rightarrow K$ on a

$$\text{Dim}_K H^i(E \otimes_A^{\mathbb{L}} K) \leq \nu(i) \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

3. Soit ν un type et A un anneau commutatif. Nous dirons qu'un A -dg-algèbre propre B est de type ν si son complexe sous-jacent est de type ν .

Le théorème suivant caractérise les familles quasi-compactes de dg-algèbres propres et lisses comme les familles dont les types et les dimensions cohomologiques sont bornés.

Théorème 3.8 Soit $\mathcal{F} \subset \text{dg-alg}^{p,l}(k)$ une famille de k -dg-algèbres propres et lisses. Alors, \mathcal{F} est quasi-compacte si et seulement s'il existe un type ν et un entier d tels que les deux conditions suivante soient satisfaites.

1. Toute dg-algèbre $B \in \mathcal{F}$ est de type ν (relativement à k).
2. Pour toute dg-algèbre $B \in \mathcal{F}$, il existe $f_1, \dots, f_n \in k$ avec $\sum f_i = 1$, tels que chaque $B \otimes_k^{\mathbb{L}} k[f_i^{-1}]$ soit de dimension cohomologique inférieure à d (relativement à $k[f_i^{-1}]$).

La démonstration de ce théorème va prendre un certain temps, et nous y consacrons la fin de cette section. La nécessité de la condition est facile et est laissée au lecteur. Nous nous concentrerons sur la suffisance.

Soit $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ un type. Pour toute k -algèbre commutative $A \in k\text{-CAlg}$, notons $\mathcal{E}_\nu(A)$ le sous-ensemble de l'ensemble des classes d'isomorphismes de $D_{\text{parf}}(A)$, formé des complexes parfaits et de type ν (sur A). Pour un morphisme $A \rightarrow B$ dans $k\text{-CAlg}$, on dispose d'un changement de base

$$B \otimes_A^{\mathbb{L}} - : D_{\text{parf}}(A) \rightarrow D_{\text{parf}}(B).$$

Ce foncteur préserve les objets de type ν . On obtient donc une application

$$B \otimes_A^{\mathbb{L}} - : \mathcal{E}_\nu(A) \rightarrow \mathcal{E}_\nu(B),$$

qui permet de voir $A \mapsto \mathcal{E}_\nu(A)$ comme un objet de $\widehat{k\text{-Aff}}$.

Lemme 3.9 Le préfaisceau \mathcal{E}_ν est quasi-compact.

Preuve: Notons \mathcal{E} le préfaisceau sur $k\text{-Aff}$ qui à $A \in k\text{-CAlg}$ associe l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets dans $D_{\text{parf}}(A)$. Notons $X \in \widehat{k\text{-Aff}}$ qui à A associe l'ensemble des complexes de A -modules

$$\dots A^{n_{i+1}} \xrightarrow{d_{i+1}} A^{n_i} \xrightarrow{d_i} A^{n_{i-1}} \xrightarrow{d_{i-1}} \dots,$$

avec $0 \leq n_i \leq \nu(i)$ pour tout i . Il est facile de voir que X est représenté par une réunion disjointe finie de schémas affines, dont les composantes paramétrisent les complexes pour lesquels les n_i sont tous fixés. On dispose d'un morphisme de préfaisceaux

$$X \longrightarrow \mathcal{E}$$

qui à un complexes de A -modules comme ci-dessus associe sa classe d'isomorphisme dans $D_{parf}(A)$. Il est facile de voir que ce morphisme se factorise à travers le faisceau associé

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & a(X) \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{E} & & \end{array}$$

(on remarquera que le foncteur $\mathcal{E} : k - CAlg \longrightarrow Ens$ commute avec les produits finis, et donc $Hom(\coprod X_i, \mathcal{E}) \simeq Hom(a(\coprod X_i), \mathcal{E})$, pour toute famille finie de schémas affines X_i). Il est clair que le morphisme $X \longrightarrow \mathcal{E}$ se factorise par $\mathcal{E}_\nu \subset \mathcal{E}$. Enfin, il nous reste à remarquer que le morphisme induit

$$X \longrightarrow \mathcal{E}_\nu$$

est un épimorphisme Zariski local. En effet, pour tout anneau local (A, m) , et tout complexe parfait $E \in D(A)$ avec $Dim_{A/m} H^i(E \otimes_A^{\mathbb{L}} A/m) \leq \nu(i)$, il existe un complexe de A -modules libres P^* , avec $rang(P^i) \leq \nu(i)$, et un quasi-isomorphisme $P^* \longrightarrow E$. \square

On continue de se fixer un type ν . Pour $A \in k - CAlg$, on note $\mathcal{F}_\nu(A)$ le sous-ensemble de $dga(A)$ formée des A -dg-algèbres propres et de type ν . Cela définit un sous-préfaisceau $\mathcal{F}_\nu \subset dga$.

Lemme 3.10 *Le préfaisceau \mathcal{F}_ν est quasi-compact.*

Preuve: Nous allons appliquer le lemme 3.3 au morphisme naturel

$$\mathcal{F}_\nu \longrightarrow \mathcal{E}_\nu$$

qui à une dg-algèbre ne retient que son complexe sous-jacent. Pour cela, on définit deux préfaisceaux simpliciaux $\underline{\mathcal{F}}_\nu$ et $\underline{\mathcal{E}}_\nu$ de la façon suivante.

Pour $A \in k - CAlg$, on considère la catégorie $wA - dg - alg_\nu^c$, dont les objets sont les A -dg-algèbres cofibrantes, propres de type ν , et dont les morphismes sont les équivalences de A -dg-algèbres. Pour $A \mapsto A'$ un morphisme dans $k - CAlg$, on dispose d'un foncteur de changement de bases

$$A' \otimes_A - : wA - dg - alg_\nu^c \longrightarrow wA' - dg - alg_\nu^c.$$

Ceci permet de voir $A \mapsto wA - dg - alg_\nu^c$ comme un pseudo-foncteur $k - CAlg \longrightarrow Cat$. A équivalence près, ce pseudo-foncteur se rectifie en un foncteur strict $k - CAlg \longrightarrow Cat$. En composant avec le foncteur nerf $N : Cat \longrightarrow SEns$ on obtient le préfaisceau simplicial $\underline{\mathcal{F}}_\nu$. Par définition, $\underline{\mathcal{F}}_\nu(A)$ est naturellement équivalent au nerf de la catégorie $wA - dg - alg_\nu^c$, ce qui implique en particulier qu'il existe un isomorphisme de préfaisceaux $\pi_0(\underline{\mathcal{F}}_\nu) \simeq \mathcal{F}_\nu$.

De même, pour $A \in k - CAlg$, on considère la catégorie $wC(A)_\nu^c$, dont les objets sont les complexes de A -modules cofibrants, parfaits de type ν , et dont les morphismes sont les quasi-isomorphismes. Pour $A \mapsto A'$ un morphisme dans $k - CAlg$, on dispose d'un foncteur de changement de bases

$$A' \otimes_A - : wC(A)_\nu^c \longrightarrow wC(A')_\nu^c.$$

Ceci permet de voir $A \mapsto wC(A)_\nu^c$ comme un pseudo-foncteur $k - CAlg \longrightarrow Cat$. A équivalence près, ce pseudo-foncteur se rectifie en un foncteur strict $k - CAlg \longrightarrow Cat$. En composant avec le foncteur nerf $N : Cat \longrightarrow SEns$ on obtient le préfaisceau simplicial $\underline{\mathcal{E}}_\nu$. Par définition, $\underline{\mathcal{E}}_\nu(A)$ est naturellement équivalent au nerf de la catégorie $wC(A)_\nu^c$, ce qui implique en particulier qu'il existe un isomorphisme de préfaisceaux $\pi_0(\underline{\mathcal{E}}_\nu) \simeq \mathcal{E}_\nu$.

Enfin, il existe un morphisme de préfaisceaux simpliciaux

$$\underline{\mathcal{F}}_\nu \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}_\nu,$$

qui oublie la structure de dg-algèbre. En appliquant les lemmes 3.3 et 3.9 on voit qu'il suffit alors de montrer que pour tout schéma affine $X = Spec A$, et tout morphisme $X \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}_\nu$, le préfaisceau $\pi_0(\underline{\mathcal{F}}_\nu \times_{\underline{\mathcal{E}}_\nu}^h X)$ est quasi-compact.

On considère $\pi_0(\underline{\mathcal{F}}_\nu \times_{\underline{\mathcal{E}}_\nu}^h X)$ comme un préfaisceau sur $k - Aff/X \simeq A - CAlg$. D'après [Re1, Thm. 1.2.15], ce préfaisceau se décrit de la façon suivante. Le morphisme $X \longrightarrow \underline{\mathcal{E}}_\nu$, correspond par le lemme de Yoneda à un complexes de A -modules E , cofibrant et de type ν , que l'on pourra supposer être strictement parfait (i.e. un complexe borné de A -modules projectifs et de rangs finis). Alors, pour tout $A' \in A - CAlg$, on a un isomorphisme naturel

$$\pi_0(\underline{\mathcal{F}}_\nu \times_{\underline{\mathcal{E}}_\nu}^h X)(A') \simeq \pi_0(Map_{Op}(C(k))(\mathcal{A}_\infty, End(E) \otimes_A A')),$$

où $Map_{Op}(C(k))$ désigne l'espace des morphismes dans la catégorie des opérades au-dessus de la catégorie monoidale $C(k)$, et où $End(E)$ est l'opérade dans $C(A)$ des endomorphismes de l'objet E . Or, comme l'opérade \mathcal{A}_∞ est cofibrante, et que toutes les opérades dans $C(k)$ sont fibrantes, le morphisme naturel

$$Hom_{Op}(C(k))(\mathcal{A}_\infty, End(E) \otimes_A A') \longrightarrow \pi_0(Map_{Op}(C(k))(\mathcal{A}_\infty, End(E) \otimes_A A'))$$

est surjectif. Pour terminer la preuve du lemme 3.10 il nous suffit de remarquer que le foncteur $A' \mapsto Hom_{Op}(C(k))(\mathcal{A}_\infty, End(E) \otimes_A A')$ est représentable par un schéma affine (ce qui se déduit facilement du fait que E est un complexe borné de A -modules projectifs de rangs finis). \square

Lemme 3.11 *Soit $A \in k - CAlg$, $B \in A - dg - alg$ une A -dg-algèbre propre et M et N deux B -modules parfaits sur A . Soit $\mathcal{H}_B(M, N)$ le préfaisceau sur $k - Aff / Spec A$ qui à $A' \in A - CAlg$ associe l'ensemble des morphismes $M \otimes_A^{\mathbb{L}} A' \longrightarrow N \otimes_A^{\mathbb{L}} A'$ dans la catégorie $Ho(B \otimes_A^{\mathbb{L}} A' - Mod)$. Alors, $\mathcal{H}_B(M, N)$ est quasi-compact.*

Preuve: On peut commencer par supposer que B est une A -dg-algèbre cofibrante. De même, on supposera que M est un B -module cofibrant.

Sous-lemme 3.12 *Il existe un B -dg-module P qui soit un complexe borné de A -modules projectifs de rangs finis, et un isomorphisme dans $Ho(B - Mod)$, $P \simeq N$.*

Preuve du sous-lemme: Choisissons un complexe borné de A -modules projectifs libres et de rangs finis P et un quasi-isomorphisme $u : P \rightarrow N$. On factorise u en

$$P \xrightarrow{j} N' \xrightarrow{p} N$$

avec j une cofibration triviale dans $C(A)$ et p une fibration triviale dans $C(A)$. On considère $\underline{End}(p)$, la A -dg-algèbre des endomorphismes du diagramme de complexes de A -modules $p : N' \rightarrow N$. Par définition, on a

$$\underline{End}(p) := \underline{End}(N') \times_{\underline{Hom}(N', N)} \underline{End}(N).$$

On remarquera que le morphisme naturel

$$\underline{End}(p) \rightarrow \underline{End}(N)$$

est un une fibration triviale de A -dg-algèbres. Comme B est cofibrante, le morphisme $B \rightarrow \underline{End}(N)$ qui détermine la structure de B -dg-module sur N se relève à un morphisme $B \rightarrow \underline{End}(p)$. En d'autres termes, il existe une structure de B -dg-module sur N' tel que le morphisme $p : N' \rightarrow N$ soit une équivalence. Ceci montre que l'on peut remplacer N par N' est donc supposer que le morphisme u est une cofibration triviale de complexes de A -modules.

Le morphisme

$$f : \underline{End}(u) \rightarrow \underline{End}(N)$$

est alors une équivalences de A -dg-algèbres. Ainsi, comme B est cofibrante le morphisme $\alpha : B \rightarrow \underline{End}(N)$ se relève en un morphisme $\beta : B \rightarrow \underline{End}(u)$ à homotopie près. Soient $\Gamma^1(B)$ un objet cylindre pour B et

$$h : \Gamma^1(B) \rightarrow \underline{End}(N)$$

une homotopie entre $f \circ \beta$ et α . Le morphisme induit $B \rightarrow \underline{End}(u) \rightarrow \underline{End}(P)$ détermine une structure de B -dg-module sur P . Le morphisme h détermine lui une structure de $\Gamma^1(B)$ -dg-module sur le complexe N , et par les deux morphismes naturels $B \rightrightarrows \Gamma^1(B)$, il détermine aussi deux structures de B -dg-modules sur le complexe N (nous noterons N_1 et N_2 les deux B -dg-modules correspondants). Le première de ces structures, disons N_1 , est la structure que l'on s'est initialement donnée sur N . La seconde, N_2 , est une structure de B -dg-modules tel que le morphisme $u : P \rightarrow N_2$ soit un morphisme de B -dg-modules. Enfin, Comme les deux morphismes $B \rightrightarrows \Gamma^1(B)$ sont des équivalences qui possèdent la projection naturelle $\Gamma^1(B) \rightarrow B$ comme rétraction en commun, les deux objets N_1 et N_2 sont isomorphes dans $Ho(B - dg - Mod)$ (les deux foncteurs $Ho(\Gamma^1(B)) \rightrightarrows Ho(B - Mod)$ sont des quasi-inverses du même foncteur $-\otimes_{\Gamma^1(B)}^{\mathbb{L}} B$). Ainsi, P est finalement isomorphe à $N_1 = N$ dans $Ho(B - dg - mod)$. \square

On revient à la preuve du lemme 3.11. En utilisant le sous-lemme 3.12, on supposera donc de plus que N est un complexe borné de A -modules projectifs et de rangs finis. On considère alors le préfaisceau $Hom_B(M, N)$, qui à $A' \in A - CAlg$ associe l'ensemble des morphismes de B -dg-modules $M \rightarrow N \otimes_A A'$. Comme le complexe sous-jacent à N est un complexe borné de A -modules projectifs de rangs finis, le foncteur $Hom_B(M, N)$ est représentable par un schéma affine. Enfin, comme M est cofibrant et que tout B -module est fibrant, le morphisme $Hom_B(M, N) \rightarrow \mathcal{H}_B(M, N)$ est un épimorphisme de préfaisceau. Ceci montre que $\mathcal{H}_B(M, N)$ est quasi-compact. \square

Lemme 3.13 Soient $A \in k - CAlg$, $B \in A - dg - alg$ une A - dg -algèbre propre, M et N deux B -modules parfaits sur A et $f, g : M \rightarrow N$ deux morphismes de B - dg -modules. Soit $\mathcal{E}\mathcal{Q}(f, g)$ le sous-préfaisceau de $Spec A$ qui à $A' \in k - CAlg$ associe le sous-ensemble de $X(A')$ formé des morphismes $A \rightarrow A'$ tels que les deux morphismes

$$f \otimes_A^{\mathbb{L}} A', g \otimes_A^{\mathbb{L}} A' : M \otimes_A^{\mathbb{L}} A' \rightarrow N \otimes_A^{\mathbb{L}} A'$$

soient égaux dans la catégorie $Ho(B \otimes_A^{\mathbb{L}} A' - Mod)$. Alors, $\mathcal{E}\mathcal{Q}(f, g)$ est quasi-compact.

Preuve: La preuve suit le même principe que celle du lemme 3.11 et utilise elle aussi le sous-lemme 3.12.

On peut supposer que B est cofibrante, que M est cofibrant, et de plus d'après le sous-lemme 3.12 que N est un complexe borné de A -modules projectifs et de rangs finis. Soit $\Gamma^1(M)$ un objet cylindre pour le B - dg -module M . On considère alors $Hom_B(f, g)$, le préfaisceau sur $k - Aff / Spec A$ qui à $A' \in A - CAlg$ associe l'ensemble des morphismes $u : \Gamma^1(M) \rightarrow N \otimes_A A'$, tels que les deux morphismes induits

$$M \rightrightarrows \Gamma^1(M) \rightarrow N \otimes_A A'$$

soit égaux à $f \otimes_A A'$ et $g \otimes_A A'$. Le foncteur $Hom_B(f, g)$ est représentable par un schéma affine au-dessus de X . De plus, le morphisme naturel

$$Hom_B(f, g) \rightarrow X$$

a $\mathcal{E}\mathcal{Q}(f, g)$ pour image. Ainsi, le préfaisceau $\mathcal{E}\mathcal{Q}(f, g)$ est quasi-compact. \square

Lemme 3.14 Soient $A \in k - CAlg$, $B \in A - dg - alg$ une A - dg -algèbre propre et $d \geq 0$ un entier. Soit $X_{li,d}$ le sous-préfaisceau de $X = Spec A$, qui à $A' \in k - CAlg$ associe le sous-ensemble de $X(A')$ formé des morphismes $A \rightarrow A'$ tels que $B \otimes_A^{\mathbb{L}} A'$ soit lisse et de dimension cohomologique inférieure à d (relativement à A'). Alors, $X_{li,d}$ est quasi-compact.

Preuve: On considère B comme un $B \otimes_A^{\mathbb{L}} B^{op}$ - dg -module, et on lui applique la construction de sa résolution libre standard de §2.4 (on peut pour simplifier supposer que B est cofibrante). On considère alors le morphisme de $B \otimes_A^{\mathbb{L}} B^{op}$ - dg -modules

$$p : N := |Sq_d \mathbb{R}_*(B)| \rightarrow B.$$

Notons F le préfaisceau simplicial sur $k - Aff / Spec A$ qui à $A' \in A - CAlg$ associe l'ensemble des morphismes $s : M \rightarrow N \otimes_A^{\mathbb{L}} A'$ de $Ho(B \otimes_A^{\mathbb{L}} B^{op} - Mod)$ tels que $p \circ s = id$ (toujours dans $Ho(B \otimes_A^{\mathbb{L}} B^{op} - Mod)$). Le morphisme naturel $F \rightarrow X = Spec A$ a clairement pour préfaisceau image $X_{li,d}$. De plus, les lemmes 3.11 et 3.13 impliquent que F est quasi-compact. Ainsi, $X_{li,d}$ est quasi-compact. \square

Preuve du théorème 3.8: Notons $\mathcal{F}_{\nu,d}$ le préfaisceau sur $k - Aff$ qui à A associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de A - dg -algèbres B dans $Ho(A - dg - alg)$ qui sont propres et lisses et qui vérifient les deux conditions suivantes

1. B est de type ν (relativement à A).
2. Il existe $a_1, \dots, a_n \in A$ avec $\sum a_i = 1$, tels que chaque $B \otimes_A A[a_i^{-1}]$ soit de dimension cohomologique inférieure à d (relativement à $A[a_i^{-1}]$).

Il s'agit bien entendu de montrer que le préfaisceau $\mathcal{F}_{\nu,d}$ est quasi-compact.

Le préfaisceau $\mathcal{F}_{\nu,d}$ est un sous-préfaisceau de \mathcal{F}_{ν} considéré dans le lemme 3.10. Soit $X = \text{Spec } A \rightarrow \mathcal{F}_{\nu}$ un épimorphisme Zariski local. Ce morphisme correspond à une A -dg-algèbre B propre et de type ν . Par le lemme 3.14 $X_{li,d}$, le lieu où B est lisse de dimension cohomologique inférieure à d est quasi-compact. De toute évidence, le morphisme $X_{li,d} \rightarrow \mathcal{F}_{\nu}$ se factorise par $\mathcal{F}_{\nu,d}$, et le morphisme induit $X_{li,d} \rightarrow \mathcal{F}_{\nu,d}$ est un épimorphisme Zariski local. Ceci termine la preuve du théorème. \square

4 Le théorème de finitude homotopique

Nous arrivons enfin au théorème de finitude homotopique qui s'énonce comme suit.

Théorème 4.1 *Soit k un anneau commutatif. Soient ν un type et $d \in \mathbb{N}$. Alors, il existe un entier $n(\nu, d)$ qui vérifie les deux propriétés suivantes.*

1. *Pour toute k -dg-algèbre B propre et lisse, de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d , il existe des éléments $f_1, \dots, f_n \in k$ avec $\sum_i f_i = 1$ et tels que pour tout i les morphismes naturels*

$$\mathbb{L}(i_{n(\nu,d)})!i_{n(\nu,d)}^*(B \otimes_k k[f_i^{-1}]) \rightarrow B \otimes_k k[f_i^{-1}]$$

possède une section dans $Ho(k[f_i^{-1}] - dg - alg)$.

2. *Pour deux k -dg-algèbres B et B' propres et lisses, de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d , il existe des éléments $f_1, \dots, f_n \in k$ avec $\sum_i f_i = 1$ et tels que pour tout i les morphismes d'ensembles simpliciaux*

$$\text{Map}_{k[f_i^{-1}] - dg - alg}(B \otimes_k k[f_i^{-1}], B' \otimes_k k[f_i^{-1}]) \rightarrow \text{Map}_{k[f_i^{-1}] - \mathcal{A}_{n(\nu,d)} - alg}(i_{n(\nu,d)}^*(B \otimes_k k[f_i^{-1}]), i_{n(\nu,d)}^*(B' \otimes_k k[f_i^{-1}]))$$

$$\text{Map}_{k[f_i^{-1}] - dg - alg}^{eq}(B \otimes_k k[f_i^{-1}], B' \otimes_k k[f_i^{-1}]) \rightarrow \text{Map}_{k[f_i^{-1}] - \mathcal{A}_{n(\nu,d)} - alg}^{eq}(i_{n(\nu,d)}^*(B \otimes_k k[f_i^{-1}]), i_{n(\nu,d)}^*(B' \otimes_k k[f_i^{-1}]))$$

possèdent des rétractions dans la catégorie $Ho(SEns)$.

Avant d'attaquer la preuve du théorème nous en déduisons le corollaire suivant.

Corollaire 4.2 *Soit k un anneau local commutatif. Pour tout type ν et tout entier $d \geq 0$, il existe un entier $n(\nu, d)$ qui vérifie les conditions suivantes.*

1. *Pour toute k -dg-algèbre B propre et lisse, de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d , les morphismes naturels*

$$\mathbb{L}(i_{n(\nu,d)})!i_{n(\nu,d)}^*(B) \rightarrow B$$

possède une section dans $Ho(k - dg - alg)$.

2. Pour deux k -dg-algèbres B et B' propres et lisses, de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d , les morphismes d'ensembles simpliciaux

$$\text{Map}_{k-dg-alg}(B, B') \longrightarrow \text{Map}_{k-\mathcal{A}_{n(\nu,d)}-alg}(i_{n(\nu,d)}^*(B), i_{n(\nu,d)}^*(B'))$$

$$\text{Map}_{k-dg-alg}^{eq}(B, B') \longrightarrow \text{Map}_{k-\mathcal{A}_{n(\nu,d)}-alg}^{eq}(i_{n(\nu,d)}^*(B), i_{n(\nu,d)}^*(B'))$$

possèdent des rétractions dans la catégorie $Ho(SEns)$.

3. Deux k -dg-algèbres B et B' de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d sont isomorphes dans $Ho(k-dg-alg)$ si et seulement si les $\mathcal{A}_{n(\nu,d)}$ -algèbres $i_{n(\nu,d)}^*(B)$ et $i_{n(\nu,d)}^*(B')$ sont isomorphes dans $Ho(\mathcal{A}_{n(\nu,d)}-dg-alg)$.

4.1 Petit détour par la "nouvelle géométrie algébrique courageuse"

Pour ce paragraphe on se fixe un anneau commutatif k .

Soit $Hk-Mod$ la catégorie de modèles des Hk -modules dans les spectres symétriques au sens de [Ho-S-S]. On munira $Hk-Mod$ de sa structure de catégorie de modèles stable et positive de [S1]. Le smash produit de spectres symétriques induit une structure monoidale symétrique $-\wedge_{Hk}-$ sur $Hk-Mod$ qui en fait une catégorie de modèle monoidale vérifiant l'axiome du monoïde. Enfin, on notera $Hk-CAlg$ la catégorie des monoïdes commutatifs dans $Hk-Mod$ (i.e. des Hk -algèbres commutatives). D'après [S1] elle est munie d'une structure de catégorie de modèles pour laquelle les fibrations et les équivalences sont définies dans $Hk-Mod$. De même, nous noterons $Hk-Alg$ la catégorie des monoïdes dans $Hk-Mod$ (i.e. des Hk -algèbres). Elle est elle aussi munie de sa structure de modèles pour laquelle les fibrations et les équivalences sont définies dans $Hk-Mod$. On sait qu'il existe une chaîne d'équivalences de Quillen entre $Hk-Alg$ et $k-dg-alg$ (voir [S2]). On identifiera les catégories homotopiques $Ho(Hk-Alg)$ et $Ho(k-dg-alg)$ à travers cette équivalence, ainsi que les ensembles simpliciaux de morphismes correspondant.

Notons $Hk-Aff$ la catégorie opposée à $Hk-CAlg$, et $SPr(Hk-Aff)$ la catégorie des foncteurs $Hk-CAlg \rightarrow SEns$. Nous munirons $SPr(Hk-Aff)$ de sa structure de modèle projective niveau par niveau pour laquelle les équivalences et les fibrations sont définies niveau par niveau au-dessus des objets de $Hk-CAlg$. Pour une Hk -algèbre commutative $A \in Hk-CAlg$, on pose

$$\mathbb{R}Spec A : Hk-CAlg \longrightarrow SEns,$$

qui à $B \in Hk-CAlg$ fait correspondre l'ensemble simplicial des morphismes de $Q(A)$ dans $R(B)$ ($Hk-CAlg$ est une catégorie de modèles simpliciale)

$$(\mathbb{R}Spec A) := \underline{Hom}(Q(A), R(B)),$$

où Q et R sont des foncteurs de remplacement cofibrant et fibrant dans $Hk-CAlg$. Ceci définit un foncteur au niveau des catégories homotopiques

$$\mathbb{R}Spec : Ho(Hk-CAlg)^{op} \longrightarrow Ho(SPr(Hk-Aff)).$$

Le lemme de Yoneda pour la catégories de modèles (voir e.g. [HAGI]) implique que $\mathbb{R}Spec$ est un foncteur pleinement fidèle.

Un objet dans l'image essentielle du foncteur $\mathbb{R}Spec$ sera dit *affine*. Comme le foncteur $\mathbb{R}Spec$ commute avec les limites homotopiques et qu'il est pleinement fidèle, on voit qu'un foncteur $Hk - CAlg \rightarrow SEns$ qui est limite homotopique d'affines est lui-même affine.

Définition 4.3 *Un foncteur $F : Hk - CAlg \rightarrow SEns$ est homotopiquement de présentation finie si pour tout système filtrant d'objets $\{A_\alpha\}$ dans $Hk - CAlg$, le morphisme naturel*

$$Hocolim_\alpha F(A_\alpha) \simeq Colim_\alpha F(A_\alpha) \rightarrow F(Hocolim_\alpha A_\alpha)$$

est une équivalence.

Soit maintenant B et B' deux k -dg-algèbres propres. On les voit à travers l'équivalence $Ho(k - dg - alg) \simeq Ho(Hk - Alg)$ comme des Hk -algèbres. On définit alors un foncteur

$$Eq(B, B') : Hk - CAlg \rightarrow SEns,$$

qui à $A \in Hk - CAlg$ associe

$$Eq(B, B')(A) := \underline{Hom}_{Hk-Alg}^{eq}(Q(B) \wedge_{Hk} A, R(Q(B') \wedge_{Hk} A)),$$

où Q et R sont des foncteurs de remplacement cofibrant et fibrant dans $Hk - Alg$. Ce foncteur sera considéré comme un objet dans $Ho(SPr(Hk - Aff))$.

Lemme 4.4 *Le foncteur $Eq(B, B')$ est affine.*

Preuve: La preuve de cette proposition se fait en deux étapes. On commence par considérer un foncteur auxiliaire

$$Hom(B, B') : Hk - CAlg \rightarrow SEns,$$

qui à $A \in Hk - CAlg$ associe

$$Hom(B, B')(A) := \underline{Hom}_{Hk-Alg}(Q(B), R(Q(B') \wedge_{Hk} A)) = \underline{Hom}_{HA-Alg}(Q(B) \wedge_{Hk} A, R(Q(B') \wedge_{Hk} A)).$$

Ainsi, le foncteur $Eq(B, B')$ est un sous-foncteur de $Hom(B, B')$.

Commençons pas montrer que $Hom(B, B')$ est affine. Pour cela, on écrit B comme une colimite $Colim_n B_n$, où pour tout entier n il existe un carré cocartésien dans $k - dg - alg$

$$\begin{array}{ccc} B_n & \longrightarrow & B_{n+1} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \coprod_i S_k(n_i) & \longrightarrow & \coprod_i D_k(n_i + 1), \end{array}$$

où le coproduit est pris sur l'ensembles des paires (n_i, f) , avec $n_i \in \mathbb{Z}$ et $f : S_k(n_i) \rightarrow B_n$ est un morphisme (voir [Ho, §2]). Dans ce cas, le foncteur $Hom(B, B')$ est équivalent à la limite homotopique $Holim_n Hom(B_n, B')$. Pour tout n on dispose de plus d'un diagramme homotopiquement

cartésien

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(B_{n+1}, B') & \longrightarrow & \text{Hom}(B_{n+1}, B') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \prod_i \text{Hom}(D_k(n_i + 1), B') & \longrightarrow & \prod_i \text{Hom}(S_k(n_i), B'). \end{array}$$

Comme les objets affines sont stable par limites homotopiques il nous suffit de vérifier que pour un entier n les objets $\text{Hom}(D_k(n), B')$ et $\text{Hom}(S_k(n), B')$ sont affines. Comme $D_k(n)$ est équivalente à k , on a $\text{Hom}(D_k(n), B') \simeq \mathbb{R}\text{Spec} Hk$. La k -dg-algèbre $S_k(n)$ est libre engendré par un élément en degré $-n$, on a pour tout $A \in Hk - \text{CAlg}$

$$\text{Hom}(S_k(n), B')(A) \simeq \text{Map}_{Hk\text{-Mod}}(Hk, B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A[-n]).$$

Notons $(B')^\vee := \mathbb{R}\underline{\text{Hom}}(B', Hk)$ le Hk -module dual (dérivé) de B' (notons que comme B' est propre, il est fortement dualisable comme Hk -module, voir [HAGII] pour la notion de fortement dualisable). Considérons A_0 la Hk -algèbre commutative libre engendrée par $(B')^\vee[n]$. Par dualité, on a pour $A \in Hk - \text{CAlg}$

$$(\mathbb{R}\text{Spec} A_0)(A) \simeq \text{Map}_{Hk\text{-Mod}}((B')^\vee[n], A) \simeq \text{Map}_{Hk\text{-Mod}}(Hk, B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A[-n]).$$

Le foncteur $\text{Hom}(S_k(n), B')$ est donc isomorphe dans $\text{Ho}(SPr(Hk - \text{Aff}))$ à $\mathbb{R}\text{Spec} A_0$.

L'équivalence $\mathbb{R}\text{Spec} A_0 \simeq \text{Hom}(B, B')$ définit un morphisme de A_0 -algèbres $u : Q(B) \wedge_{Hk} A_0 \rightarrow R(Q(B') \wedge_{Hk} A_0)$. Notons K la fibre homotopique de ce morphisme dans $\text{Ho}(A_0 - \text{Mod})$. Le sous-foncteur

$$Eq(B, B') \subset \text{Hom}(B, B') \simeq \mathbb{R}\text{Spec} A_0$$

est tel que pour tout $A \in Hk - \text{CAlg}$, $Eq(B, B')(A_0)$ est le sous-ensemble simplicial de $\text{Map}_{Hk\text{-CAlg}}(A_0, A)$ formé des morphismes $v : A \rightarrow A_0$ tels que $K \wedge_A^{\mathbb{L}} A_0 \simeq *$. Comme les Hk -modules B et B' sont parfaits, le sous-foncteur $Eq(B, B')$ est affine de la forme $\mathbb{R}\text{Spec}(A_0)_K$ (voir [HAGII, §1.2.10]). \square

Lemme 4.5 *Si B et B' sont propres et lisses alors le foncteur $Eq(B, B')$ est homotopiquement de présentation finie.*

Preuve: Soit $\{A_\alpha\}$ un système filtrant dans $Hk - \text{CAlg}$ de colimite homotopique $A = \text{Hocolim}_\alpha$. On considère le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Colim}_\alpha Eq(B, B')(A_\alpha) & \longrightarrow & Eq(B, B')(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Colim}_\alpha \text{Hom}(B, B')(A_\alpha) & \longrightarrow & \text{Hom}(B, B')(A). \end{array}$$

Par définition, les morphismes verticaux induisent des isomorphismes sur les π_i pour $i > 0$ et des injections sur les π_0 . De plus, B étant homotopiquement de présentation finie on a

$$\begin{aligned} \text{Colim}_\alpha \text{Hom}(B, B')(A_\alpha) &\simeq \text{Colim}_\alpha \text{Map}_{Hk\text{-Alg}}(B, B' \wedge_A^{\mathbb{L}} A_\alpha) \simeq \text{Map}_{Hk\text{-Alg}}(B, \text{Hocolim}_\alpha B' \wedge_A^{\mathbb{L}} A_\alpha) \\ &\simeq \text{Map}_{Hk\text{-Alg}}(B, B' \wedge_A^{\mathbb{L}} (\text{Hocolim}_\alpha A_\alpha)) \simeq \text{Map}_{Hk\text{-Alg}}(B, B' \wedge_A^{\mathbb{L}} A) \simeq \text{Hom}(B, B')(A). \end{aligned}$$

Ainsi, on en déduit que le morphisme horizontal du haut induit des isomorphismes sur les π_i pour $i > 0$ et une injection sur π_0 . Il nous reste à voir que ce morphisme est aussi surjectif sur les π_0 . Soit $u : B \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A \simeq B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A$ un isomorphisme dans $Ho(A - Alg)$. Notons v un inverse de u dans $Ho(A - Alg)$. Comme

$$[B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A, B \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A] \simeq Colim_{\alpha} [B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A_{\alpha}, B \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A_{\alpha}]$$

il existe un α tel que u et v soit défini sur A_{α} (nous noterons ces morphismes u_{α} et v_{α} dans $Ho(A_{\alpha} - Alg)$). De plus, on a $uv = id$ dans $[B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A, B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A]$. Or, comme nous l'avons vu ci-dessus on a

$$[B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A, B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A] \simeq Colim_{\alpha} [B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A_{\alpha}, B' \wedge_{Hk}^{\mathbb{L}} A_{\alpha}].$$

Ainsi, on peut choisir α de sorte à ce que u et v soit définis sur A_{α} , et de plus $u_{\alpha}v_{\alpha} = id$. De même, on trouve que l'on peut choisir α de sorte à ce que de plus $v_{\alpha}u_{\alpha} = id$. Ainsi, u_{α} est un isomorphisme dans $Ho(A_{\alpha} - Alg)$. Ceci termine la preuve du lemme. \square

Corollaire 4.6 *Soient B et B' deux k -dg-algèbres propres et lisses. Alors il existe un entier n tel que pour tout $A \in k - CAlg$ le morphisme d'ensembles simpliciaux*

$$Map_{A-dg-alg}^{eq}(B \otimes_k^{\mathbb{L}} A, B' \otimes_k^{\mathbb{L}} A) \longrightarrow Map_{k-A_n-alg}^{eq}(i_n^*(B) \otimes_k^{\mathbb{L}} A, i_n^*(B') \otimes_k^{\mathbb{L}} A)$$

possède une rétraction dans $Ho(SEns)$.

Preuve: Nous avons vu que le foncteur $Eq(B, B')$ est affine et homotopiquement de présentation finie (voir Lem. 4.4 et 4.5). De même, on peut définir un foncteur $Eq_n(B, B')$, qui à $A \in Hk - Alg$ associe $\underline{Hom}_{Hk-A_n-alg}(Q(i_n^*(B)), R(Q(i_n^*(B')) \wedge_{Hk} A))$. On laisse le soin aux lecteurs de généraliser les constructions précédentes des algèbres associatives aux algèbres sur une opérade dans $Hk - Mod$. En particulier, de façon tout à fait analogue au lemme 4.4 on montre que $Eq_n(B, B')$ est affine. Notons $A_0 \in Hk - CAlg$ tel que $\mathbb{R}Spec A_0 \simeq Eq(B, B')$. De même, notons $A_n \in Hk - CAlg$ tel que $\mathbb{R}Spec A_n \simeq Eq_n(B, B')$. D'après la proposition 2.9 on a

$$Eq(B, B') \simeq Holim_n Eq_n(B, B'),$$

et donc, comme le foncteur $\mathbb{R}Spec$ est pleinement fidèle, on a

$$A_0 \simeq Hocolim_n A_n.$$

Enfin, comme $Eq(B, B')$ est homotopiquement de présentation finie, A_0 est homotopiquement de présentation finie dans $Hk - CAlg$, et donc il existe un entier n tel que le morphisme naturel $A_n \longrightarrow A$ possède une section dans $Ho(Hk - CAlg)$. Ainsi,

$$Eq(B, B') \simeq \mathbb{R}Spec A \longrightarrow Eq_n(B, B') \simeq \mathbb{R}Spec A_n$$

possède une rétraction dans $Ho(SPr(Hk - Aff))$. En prenant les valeurs sur $A \in Hk - CAlg$ on trouve que le résultat annoncé. \square

4.2 Preuve du théorème

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer notre théorème 4.1.

Fixons un type ν et un entier $d \geq 0$. D'après le théorème 3.8 il existe une k -algèbre commutative A_0 et une A -dg-algèbre B_0 propre de type ν , lisse et de dimension cohomologique inférieure à d qui vérifie la conditions suivante: pour toute k -dg-algèbre B propre, lisse et de dimension cohomologique inférieure à d , il existe des éléments $f_1, \dots, f_m \in k$, et des morphismes $A_0 \rightarrow k[f_i^{-1}]$ tel que $B_0 \otimes_{A_0}^{\mathbb{L}} k[f_i^{-1}]$ et $B \otimes_k k[f_i^{-1}]$ soient isomorphes dans $Ho(k[f_i^{-1}] - dg - alg)$ (pour tout i).

On considère $A_1 := A_0 \otimes_k A_0$, et deux A_1 -dg-algèbres

$$B_1 := B_0 \otimes_{A_0}^{\mathbb{L}} (A_0 \otimes_k A_0) \quad B_2 := (A_0 \otimes_k A_0) \otimes_{A_0}^{\mathbb{L}} B.$$

D'après le corollaire 2.11, et le corollaire 4.6 on sait qu'il existe un entier $n(\nu, d)$ qui vérifie les deux conditions suivantes.

1. Le morphisme

$$\mathbb{L}(i_n)!i_n^*(B_0) \longrightarrow B_0$$

possède une section dans $Ho(A_0 - dg - alg)$.

2. Pour tout $A \in A_1 - CAlg$, le morphisme

$$Map_{A-dg-alg}^{eq}(B_1 \otimes_{A_1}^{\mathbb{L}} A, B_2 \otimes_{A_1}^{\mathbb{L}} A) \longrightarrow Map_{A-A_n-alg}^{eq}(i_n^*(B_1) \otimes_{A_1}^{\mathbb{L}} A, i_n^*(B_2) \otimes_{A_1}^{\mathbb{L}} A)$$

possède une rétraction dans $Ho(SEns)$.

La propriété semi-universelle du couple (A_0, B_0) rappelée plus haut implique alors le point (1) et la seconde partie du point (2) du théorème (celle concernant les Map^{eq}). Cela dit, le point (1) du théorème implique aussi la première partie du point (2) à l'aide de l'équivalence

$$Map_{k-A_n-alg}(i_n^*(B), i_n^*(B')) \simeq Map_{k-dg-alg}(\mathbb{L}(i_n)!i_n^*(B), B').$$

Ceci termine la preuve du théorème 4.1. □

En corollaire de la preuve précédente on voit que l'entier $n(\nu, d)$ peut être choisi indépendant du l'anneau k . En effet, si $X = Spec A \rightarrow \mathcal{F}_{\nu, d, \mathbb{Z}}$ un épimorphisme Zariksi local, où $\mathcal{F}_{\nu, d, \mathbb{Z}} \in \widehat{\mathbb{Z} - Aff}$ est défini comme dans la preuve du théorème 3.8 mais pour $k = \mathbb{Z}$. Alors, le morphisme induit $X \times Spec k \rightarrow \mathcal{F}_{\nu, d, \mathbb{Z}} \times Spec k$ est encore un épimorphisme Zariski local dans $k - \widehat{Aff} \simeq \widehat{\mathbb{Z} - Aff} / Spec k$. Or, $\mathcal{F}_{\nu, d, \mathbb{Z}} \times Spec k$ est le préfaisceau défini dans la preuve du théorème 3.8. Ainsi, le couple (A_0, B_0) utilisé en début de preuve du théorème 4.1 ci-dessus peut être choisi de la forme $(A \otimes_{\mathbb{Z}} k, B \otimes_A^{\mathbb{L}} (A \otimes_{\mathbb{Z}} k))$, pour B une certaine A -dg-algèbre propre et lisse. La version finale du théorème de finitude homotopique est alors la suivante.

Théorème 4.7 *Soient ν un type et $d \in \mathbb{N}$. Alors, il existe un entier $n(\nu, d)$ tel que pour tout anneau commutatif k les deux propriétés suivantes sont satisfaites.*

1. Pour toute k -dg-algèbre B propre et lisse, de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d , il existe des éléments $f_1, \dots, f_n \in k$ avec $\sum_i f_i = 1$ et tels que pour tout i les morphismes naturels

$$\mathbb{L}(i_{n(\nu,d)})!i_{n(\nu,d)}^*(B \otimes_k k[f_i^{-1}]) \longrightarrow B \otimes_k k[f_i^{-1}]$$

possède une section dans $\mathrm{Ho}(k[f_i^{-1}] - dg - alg)$.

2. Pour deux k -dg-algèbres B et B' propres et lisses, de type ν et de dimension cohomologique inférieure à d , il existe des éléments $f_1, \dots, f_n \in k$ avec $\sum_i f_i = 1$ et tels que pour tout i les morphismes d'ensembles simpliciaux

$$\mathrm{Map}_{k[f_i^{-1}]-dg-alg}(B \otimes_k k[f_i^{-1}], B' \otimes_k k[f_i^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Map}_{k[f_i^{-1}]-\mathcal{A}_{n(\nu,d)}-alg}(i_{n(\nu,d)}^*(B \otimes_k k[f_i^{-1}]), i_{n(\nu,d)}^*(B' \otimes_k k[f_i^{-1}]))$$

$$\mathrm{Map}_{k[f_i^{-1}]-dg-alg}^{eq}(B \otimes_k k[f_i^{-1}], B' \otimes_k k[f_i^{-1}]) \longrightarrow \mathrm{Map}_{k[f_i^{-1}]-\mathcal{A}_{n(\nu,d)}-alg}^{eq}(i_{n(\nu,d)}^*(B \otimes_k k[f_i^{-1}]), i_{n(\nu,d)}^*(B' \otimes_k k[f_i^{-1}]))$$

possèdent des rétractions dans la catégorie $\mathrm{Ho}(\mathrm{SEns})$.

Références

- [Ho] M. Hovey, *Model categories*, Mathematical surveys and monographs, Vol. **63**, Amer. Math. Soc., Providence 1998.
- [Ho-S-S] M. Hovey, B. Shipley, J. Smith, *Symmetric spectra*, J. Amer. Math. Soc. **13**, (2000), No. 1, 149-208.
- [Il] J.-L. Illusie, *Complexes cotangents et déformation I*, Lecture Notes in Mathematics **239**, Springer-Verlag, 1971.
- [Ke1] B. Keller, *A brief introduction to A_∞ -algebras*, notes d'exposé accessible à <http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/index.html>
- [Ke2] B. Keller, *On differential graded categories*, pré-publication accessible à <http://www.math.jussieu.fr/~keller/publ/index.html>
- [Ko-So] M. Kontsevich, Y. Soibelman, *Notes on A -infinity algebras, A -infinity categories and non-commutative geometry*, pré-publication math.RA/060624.
- [Lef] K. Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞ -catégories*, thèse, 2003, pré-publication math.CT/ 0310337.
- [Ma] M. Markl, *Homotopy algebras are homotopy algebras*, Forum Mathematicum **16** (2004), 129-160.
- [Ne] A. Neeman, *Triangulated categories*, Annals of math. studies **148**, Princeton University Press, NJ, 2001, viii+449 pp.
- [Re1] C. Rezk, *Spaces of algebra structures and cohomology of operads*, thèse accessible à <http://www.math.uiuc.edu/~rezk/>

- [Re2] C. Rezk, *A model for the homotopy theory for homotopy theory*, Trans. of the Amer. Math. Soc. **353**, 073-1007.
- [S1] B. Shipley, *A convenient model for commutative ring spectra*, Contemp. Math. **346** (2004), 473-483.
- [S2] B. Shipley, *HZ-algebra spectra are differential graded algebras*, pré-publication accessible à <http://www.math.uic.edu/~bshipley/>
- [S-S] B. Shipley, S. Schwede, *Algebras and modules in monoidal model categories*, Proc. London Math. Soc. (3) **80** (2000), 491-511.
- [Sp] M. Spitzweck, *Operads, Algebras and Modules in Model Categories and Motives*, thèse accessible à <http://www.uni-math.gwdg.de/spitz/>
- [To1] B. Toën, *Higher and derived stacks: a global overview*, pré-publication math.AG/0604504.
- [To2] B. Toën, *Anneaux de définitions des dg-algèbres propres et lisses*, pré-publication accessible sur <http://www.picard.ups-tlse.fr/~toen/prepub.html>
- [To-Va1] B. Toën, M. Vaquié, *Moduli of objects in dg-categories*, à paraître aux Annales de l'ENS.
- [To-Va2] B. Toën, M. Vaquié, *Au-dessous de Spec \mathbb{Z}* , pré-publication math.AG/0509684.
- [HAGI] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry I: Topos theory*, Adv. in Math. **193** (2005), 257-372.
- [HAGII] B. Toën, G. Vezzosi, *Homotopical algebraic geometry II: Geometric stacks and applications*, pré-publication math.AG/0404373, à paraître dans Memoires of the AMS.